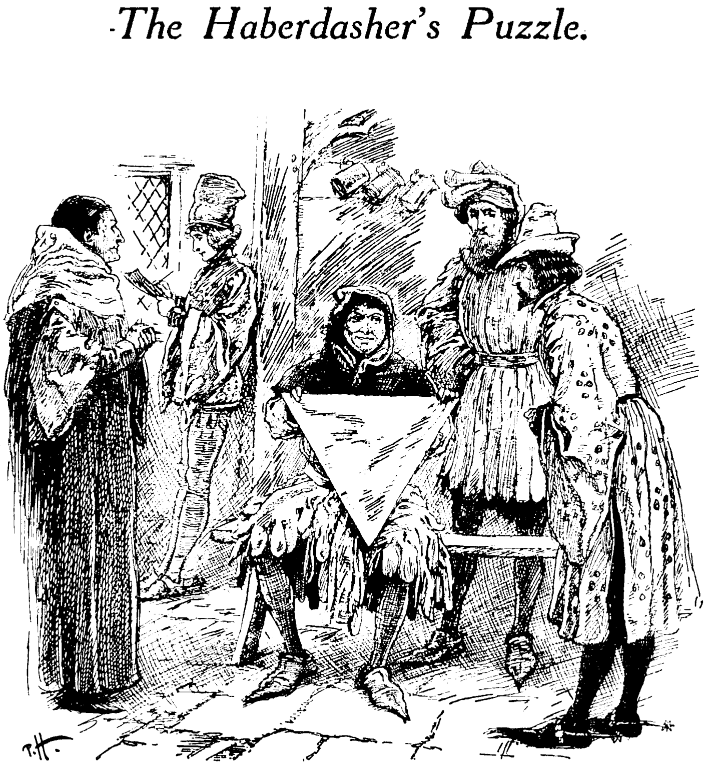
Pode-se recortar um triângulo equilátero em quatro peças que, juntas de outro modo, formem um quadrado?

DUDENEY E OS SEUS "PUZZLES"

ANTÓNIO GUEDES DE OLIVEIRA E MARIA ROSÁRIO PINTO



"Haberdasher": retroseiro, isto é, dono de uma loja de miudezas ou de retrós.

No início do Séc. XX, dois fantásticos criadores de charadas (matemáticas ou não) publicaram numerosos artigos em jornais de grande circulação e vários livros com os problemas que criaram. Embora não se conhecessem pessoalmente, colaboraram um com o outro por diversas vezes. Um, Sam Loyd, vivia nos Estados Unidos e o outro, Henry Dudeney, vivia em Inglaterra. Ao primeiro foi dedicada a coluna "O que vem à Rede" da Gazeta de Matemática N.º151, de julho de 2006, com o artigo "Os fantásticos 'Quebra-Cabeças' de Sam Loyd" de António Monteiro. Aqui falaremos um pouco mais de Henry Dudeney, sobretudo com base na introdução assinada pelo editor, Martin Gardner, de uma edição póstuma, americana, do livro de H. Dudeney, *536 Puzzles & Curious Problems*, e na pequena biografia publicada por J. J. O'Connor e E. F. Robertson para a Mac Tutor.[1]

Os autores foram parcialmente apoiados pelo CMUP, que é financiado com fundos nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), pelo projeto UIDB/00144/2020.

[1]`https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dudeney/`

Martin Gardner, ele próprio provavelmente o maior divulgador de Matemática do Séc. XX, era um grande admirador de Dudeney, em particular pelas suas charadas matemáticas. Note-se que Dudeney era filho de um professor, mas não teve grande educação formal. Estudou Matemática e História da Matemática como autodidata, um pouco como o pai do seu pai, que também foi professor mas que começou a vida como pastor de ovelhas, e que era ainda pastor quando começou a estudar por si Matemática.

Dudeney começou a fazer charadas e problemas de xadrez aos nove anos e manteve durante muitos anos colaboração com jornais populares (durante trinta anos publicou "puzzles" numa revista, *The Strand Magazine*, onde na mesma altura publicaram autores como Agatha Christie, Arthur Conan Doyle — criador de Sherlock Holmes — e P.G. Wodehouse).

Uma das suas charadas mais conhecidas, embora seja referida muitas vezes sem indicação do autor, é talvez a seguinte, publicada em 1924 no *The Strand Magazine*: *Substituir cada letra do esquema seguinte por um algarismo diferente, de modo a que represente do modo habitual uma soma.*

$$\begin{array}{r} SEND \\ +MORE \\ \hline MONEY \end{array}$$

Convidamos o leitor a resolver a charada. Sugerimos só que comece por determinar o valor de $M > 0$.

Henry Dudeney publicou o seu primeiro livro, *The Canterbury Puzzles*, em 1907.[2]

Vamos começar por considerar aqui um problema (o Problema N.º131, "Finding a Square") de um outro livro, publicado depois, *536 Puzzles & Curious Problems*. Dudeney resolve este problema com uma utilização original de um método tradicional (em inglês, "casting out nines") de trabalhar com números. Consiste em, dado um número natural, somar os algarismos desse número, em somar os algarismos dessa soma, etc., até ter um número de um só algarismo, de 1 a 9, a que Dudeney chama *a raiz digital* do número inicial.[3] Note-se que, não sendo de modo nenhum inédita a construção, é muito original a utilização que Dudeney faz dela.

A segunda charada que aqui vamos considerar faz parte de *The Canterbury Puzzles*. É apresentada como *The Haberdasher's Puzzle* — que podemos traduzir como "a charada do Retroseiro". Deve referir-se que Dudeney descreve esta e outras charadas como sendo histórias perdidas de *The Canterbury Tales*, obra clássica publicada em fins do Séc. XIV, onde os membros de um grupo de peregrinos contam cada qual uma história aos outros membros. Na charada em questão, é o Retroseiro quem apresenta (em suposto inglês antigo) um triângulo equilátero de tecido. Pede para lhe dizerem como se pode cortá-lo num número mínimo de panos que, dispostos de outro modo (sem os virar), constituam um quadrado. O retroseiro acaba por confessar que não conhece a resposta, mas diz Dudeney, num aparte, que ele, Dudeney, sabe dividir o triângulo em quatro partes que se podem unir num quadrado e convida o leitor a descobrir como. Dá mais tarde a solução, que aqui apresentamos também. Dudeney tinha claramente orgulho nesta sua invenção: mandou construir um modelo com peças em madeira e dobradiças em cobre, que lhe permitiam, rodando as peças num sentido ou no outro, formar ora um quadrado ora um

[2] https://www.gutenberg.org/files/27635/27635-h/27635-h.htm

[3] "Digital root" no original inglês. É habitual entre nós utilizar esta técnica dos "noves fora", em geral na chamada "prova dos nove".

triângulo equilátero. A Royal Society mostrou-se interessada na invenção, e Dudeney apresentou-a em 1905 numa reunião desta sociedade científica.

Em ambos os casos, apresentamos (em tradução livre) o problema que Dudeney propôs e a solução que publicou. Apresentamos também o que (naturalmente, dado o contexto) Dudeney não faz, a justificação matemática dos raciocínios usados, incluindo, no segundo caso, a prova de que *é realmente um quadrado* a figura que se constrói.

Problema 1: *São dados seis números,* $4\,784\,887$, $2\,494\,651$, $8\,595\,087$, $1\,385\,287$, $9\,042\,451$ *e* $9\,406\,087$. *Sabe-se que três desses números, somados, formam um quadrado. Quais são?*

Solução (segundo Dudeney): Tomando os seis números por ordem, a soma dos seus algarismos forma a segunda linha de números de:

4 784 887	2 494 651	8 595 087	1 385 287	9 042 451	9 406 087
46	31	42	34	25	34
1	4	6	7	7	7

Somando de novo, consecutivamente, até obter um número entre 1 e 9, a raiz digital do número inicial, obtemos a terceira linha de números. Estas raizes podem ser combinadas em diferentes conjuntos de três de oito maneiras diferentes:

146	147	167	177	467	477	677	777
2	3	5	6	8	9	2	3

dando de novo as raizes digitais indicadas. Mas, conforme foi visto em *Amusements in Mathematics* as raizes digitais de um quadrado só podem ser 1, 4, 7 ou 9,[4] de modo que os números procurados devem ter raizes 4, 7, 7 para que a soma seja um quadrado. Os dois setes podem ser selecionados de três maneiras diferentes. Mas se o quinto número for incluído, a soma termina em 189 ou em 389, o que não pode acontecer com um quadrado terminado em 89, onde 89 deve ser precedido de um algarismo par (eventualmente 0).

Portanto, os números procurados são o segundo, o quarto e o sexto, e, de facto,

$$2\,494\,651 + 1\,385\,287 + 9\,406\,087 = 13\,286\,025 = 3\,645^2\,.$$

Alguns comentários: A raiz digital de $n > 0$ é o resto na divisão de n por nove, com a diferença de que a raiz digital, como soma de algarismos não-nulos, não pode ser zero, e que pode ser 9. Mas é fácil ver que a raiz digital de n é nove se e só se n é múltiplo de 9.[5] Dudeney, em *Amusements in Mathematics*, nota que as raizes radicais dos quadrados dos números naturais formam a sequência $1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1, 9,$ "repetida até ao infinito", e conclui que um quadrado tem como raíz digital 1, 4, 7 ou 9. Podemos obter o mesmo resultado notando que, se dois números têm o mesmo resto na divisão por 10, então também têm o mesmo resto na divisão por 10 (de facto, na divisão por 20) os quadrados desses dois números, já que $(10\,k + a)^2 = 100\,k^2 + 20\,a\,k + a^2$, e que, portanto, basta considerar os algarismos das unidades dos quadrados dos inteiros de 1 a 9.

Pelo mesmo raciocínio, o quadrado de um número natural termina em 9 se e só se esse número termina em 3 ou 7. Podemos estender este raciocínio, notando que, se dois números têm o mesmo resto na divisão por 100, então os seus quadrados *diferem num*

[4] `https://www.forgottenbooks.com/en/download_pdf/Amusements_in_Mathematics_1000013184.pdf`, p.20.

[5] De facto, escrevendo como é habitual $a \equiv b \bmod 9$ no sentido de dizer que a e b têm o mesmo resto na divisão por 9 (ou que $a - b$ é múltiplo de 9), lembremos que, se $a \equiv b \bmod 9$ e $c \equiv d \bmod 9$, então $a + c \equiv b + d \bmod 9$ e $ac \equiv bd \bmod 9$. De facto, se $a = 9k + b$ e $c = 9\ell + d$, então $a + c = (9k + b) + (9\ell + d) = 9(k + \ell) + b + d$ e $ac = (9k + b)(9\ell + d) = 81k\ell + 9(b\ell + dk) + bd$. Como $10 \equiv 1 \bmod 9$, também $10^m \equiv 1 \bmod 9$ e portanto, por exemplo, $2\,494\,651 = 2 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + \cdots + 5 \cdot 10 + 2 \equiv 2 + 4 + \cdots + 5 + 2 \bmod 9$.

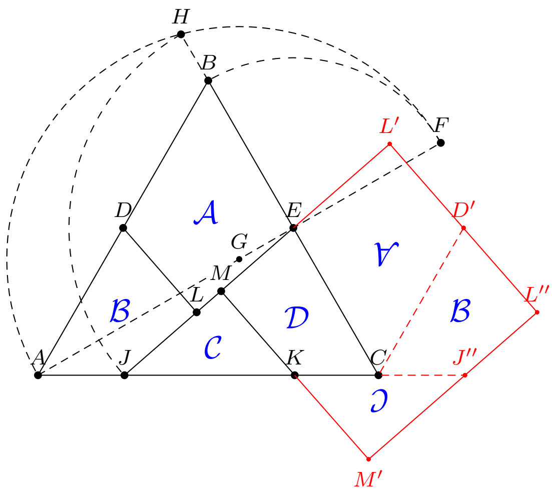
múltiplo de 200. De facto, $(100\,k+a)^2 = 10\,000\,k^2 + 200\,a\,k + a^2$. No caso de o número terminar em 3, analisando os diversos casos vemos que o quadrado de um número termina em 89 se e só se esse número termina em 33 ou 83, sendo $33^2 = 1\,089$ e $83^2 = 6\,889$. No caso de o número terminar em 7, o quadrado termina em 89 se e só se o número termina em 17 ou 67, sendo $17^2 = 289$ e $67^2 = 4\,489$. Portanto, *num quadrado terminado em 89 o algarismo das centenas é par*, como nestes quatro quadrados.[6]

smallskip

Problema 2: *Dividir um triângulo equilátero em quatro partes que, noutras posições, constituam um quadrado.*[7]

Solução (segundo Dudeney): Sejam $\triangle ABC$ o triângulo equilátero e D e E os pontos médios dos lados $\overrightarrow{AB}$ e $\overline{BC}$, respetivamente. Sobre $\overrightarrow{AE}$, do outro lado de A relativamente a E, marca-se F tal que $|EF| = |EB|$. Com centro no ponto médio de $\overline{AF}$, G, passando por estes dois pontos, desenha-se um arco que interseta $\overrightarrow{CB}$ em H. Seja J o ponto de $\overline{AC}$ à mesma distância de E que H, e $K \in \overline{CJ}$ tal que $|JK| = |BE|$. Finalmente, sejam $L, M \in \overline{EJ}$ tais que $\overline{DL}, \overline{KM} \perp \overline{EJ}$.

As quatro peças estão claramente identificadas na figura, assim como o quadrado que formam.



Alguns comentários: Pode considerar-se que a peça $\mathcal{B}$ foi rodada 180° em torno de D, sendo B a imagem de A, e que depois se rodaram *solidariamente* em torno de E, de novo 180°, a peça $\mathcal{A}$ e a peça $\mathcal{B}$ depois de rodada. Obtém-se L' como imagem de L, C como imagem de B, etc., e J'' e L'' como imagens dos rodados de J e L, respetivamente. Finalmente pode considerar-se que a peça $\mathcal{C}$ é rodada 180° em torno de K.

Portanto, $\overline{EL'}$ está no prolongamento de $\overline{EJ}$, $\overline{D'L'} \perp \overline{EJ}$, D' é o ponto médio de $\overline{L'L''}$ e $\overline{L'L''} \perp \overline{L''J''}$. Do mesmo modo, K é o ponto médio de $\overline{MM'}$ e $\overline{KM'}$ é perpendicular ao segmento definido por M' e pelo rodado $J^\star$ de J, que pertence a $\overline{AJ''}$. Como $|AJ| =$

[6]De forma mais direta, veja-se que, $(10k+7)^2-17^2 = 20(k-1)(12+5k)$, que este número é múltiplo de 100 se e só se $k = 5\ell+1$ para algum inteiro ℓ e que, se $k = 5\ell+1$, então $20(k-1)(12+5k) = 100\ell(17+25\ell)$ é múltiplo de 200 porque $\ell(17+25\ell)$ é par para todo o inteiro ℓ. Se $k = 5\ell+3$, $(10k+3)^2 - 33^2 = 100\ell(33+25\ell)$, que é múltiplo de 200 por razões análogas. De modo semelhante se vê que o algarismo das unidades de um quadrado terminado em 9 é par.

[7]Usamos aqui uma notação que não é talvez a mais usada em Portugal, onde $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ e $|AB|$ designam, respetivamente, o segmento que une os pontos A e B, a semirreta com origem em A que passa por B e o comprimento do segmento que une A e B.

$|CJ''|$ e, por construção, $|AJ| + |CK| = |JK| = |AB|/2$, $|KJ| = |KJ''|$ e, portanto, $J^\star = J''$ e as peças $\mathcal{A}$–$\mathcal{D}$, nas novas posições, *formam um retângulo.* Em particular, $|KM| = |D'L'| = |DL|$. Note-se que a área do retângulo é a área do triângulo inicial.

Na verdade, $\square JDEK$ é um paralelogramo, uma vez que $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{JK}$ são retas paralelas e $|DE| = |JK| = |AC|/2$. A simetria no centro do paralelogramo envia E em J e D em K e, consequentemente, L em M. Em particular, $|KM| = |DL|$, como vimos, e $|JM| = |EL|$. Mas então $|ML'| = |ME| + |EL'| = |ME| + |EL| = |ME| + |JM| = |EJ|$. Portanto,

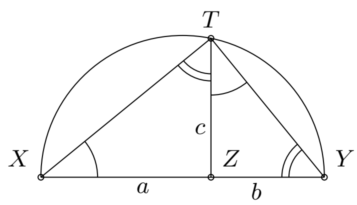
$$\text{área}(\square ML'L''M') = 2|EJ|\,|KM| = \text{área}(\triangle ABC) = |AE|\,|BC|/2\,.$$

É interessante observar que o facto de ser $|EJ| = |EH|$ não intervém na construção feita até aqui. Isto mostra que, fazendo variar $|EJ|$, isto é, a posição de J em $\overline{AC}$, podemos construir assim retângulos (para além do quadrado), todos com a área do triângulo inicial e todos com um lado igual a $|EJ|$.

Notamos agora que a construção do ponto H é uma *construção do meio proporcional*, em que, dados segmentos de comprimento a e b, respetivamente, se *constrói um segmento de comprimento c tal que $c^2 = ab$.*

Meio proporcional

Suponhamos (ver figura) que, dados quatro pontos X, Y, Z, T, $Z \in \overline{XY}$, $|XZ| = a$, $|YZ| = b$, $\overline{ZT} \perp \overline{XY}$, T pertence à circunferência de diâmetro $\overline{XY}$ e $|ZT| = c$. Portanto, $\measuredangle XTY = 90^\circ = \measuredangle TZX = \measuredangle TZY$ e são semelhantes os triângulos $\triangle XZT$ e $\triangle TZY$ e, portanto, $\frac{|XZ|}{|ZT|} = \frac{|ZT|}{|YZ|}$ (ou $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$) e $|ZT|^2 = |XZ||YZ|$.



No nosso caso, $|EH|^2 = |AE|\,|EF|$ e

$$2|EH|\,|KM| = \text{área}(\square ML'L''M') = |EH|^2\,;$$

portanto, $2|KM| = |EH|$ e, finalmente, $\square ML'L''M'$ *é um quadrado.*

Solução de $SEND + MORE = MONEY$ (notemos a complexidade da resposta — e o engenho de Dudeney). Vamos começar pelo valor representado por $M > 0$: como a soma de dois números diferentes de um só algarismo é inferior a 18, $M = 1$. Então $O = 0$ e $S = 9$, porque a coluna a seguir não pode causar transporte superior ou igual a 2, e portanto $S > 8$. Note-se que, como $S = 9$, a coluna a seguir de facto não causa transporte e $N = E + 1$, já que $N \neq E$. Como $R \neq S$, $R = 8$, e $D + E = 10 + Y$. Na verdade, como $Y \geq 2$ e $D \leq 7$, $E = 10 + Y - D \geq 12 - 7 = 5$. Por exemplo, $E = 5$ e $N = 6$, $D = 7$ e $Y = 2$ são valores que se adaptam à situação. Obtém-se

$$\begin{array}{r} SEND \\ +MORE \\ \hline MONEY \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\,5\,6\,7 \\ +1\,0\,8\,5 \\ \hline 1\,0\,6\,5\,2 \end{array}$$

É fácil agora ver que esta solução é única.

Os autores agradecem ao revisor e aos editores a leitura cuidadosa deste artigo.

António Guedes de Oliveira é Professor Catedrático Aposntado da Universidade do Porto e é investigador no CMUP (Centro de Matemática da U. Porto). Fez o doutoramento em Matemática em Darmstadt (Alemanha), e especializou-se em Combinatória.
Maria Rosário Pinto é Profesora Auxiliar da Universidade do Porto. Fez o doutoramento em Geometria em Southampton (Reino Unido).

CMUP e Departmento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 4169-007 Porto
E-mail address: agoliv,mspinto@fc.up.pt