Redução de Variedades de Poisson

Vanessa Andreia da Silva Oliveira
Mestrado em Matemática
Departamento de Matemática
2023

Orientador
Inês Cruz, Professora Auxiliar
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

U. PORTO

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

MSC

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço ao meu marido, pois sem ele teria sido impossível a realização desta dissertação. Num contexto familiar tão complexo como o nosso, sempre me deu todo o amor, apoio moral e suporte logístico necessários para que, por entre mudas de fralda, sopas, sestas, TPC's e mochilas às costas, eu conseguisse ter tempo para me dedicar ao estudo. Foi, sem dúvida, um desafio e peras para os dois, mas juntos movemos o mundo. Obrigada, do fundo do coração!

Agradeço à minha orientadora, Professora Inês Cruz, por toda a dedicação e suporte que sempre me deu, incentivando-me a questionar e a tentar perceber tudo com o máximo de detalhe que a minha mente conseguisse alcançar. Obrigada por me ter dado a liberdade necessária para poder crescer ao meu ritmo e me apaixonar ainda mais pela geometria, guiando-me de uma maneira fluída e sem nunca descartar as minhas ideias e formas de pensar. Acima de tudo, agradeço por ter sempre acreditado em mim, mesmo quando eu própria não acreditava.

Um especial agradecimento ao Professor Marco Zambon, cuja troca de e-mails permitiu desbloquear ideias e concluir uma parte importante deste trabalho.

Agradeço a toda a minha família, em particular aos meus pais e avós maternos, por todo o incentivo, compreensão e apoio que me deram, a vários níveis. Sem eles dificilmente teria tido a coragem de me inscrever no Mestrado em Matemática e a perseverança para o terminar, dando mais uns passos a caminho do meu objetivo académico.

Agradeço a todos os professores, amigos e colegas que, ao longo do meu percurso académico e na minha vida pessoal e profissional, me incentivaram a crescer e a querer ser e fazer melhor.

Por último, mas sempre em primeiro lugar no meu coração, agradeço aos meus filhos, por serem quem são e o que são!

Resumo

Neste trabalho foi feito um estudo sistemático de redução de estruturas em variedades diferenciáveis, nomeadamente a redução de variedades simpléticas com simetrias, inicialmente apresentada por Marsden e Weinstein em 1974 ([13]) e a redução de variedades de Poisson usando distribuições, formulada por Marsden e Ratiu em 1986 ([12]). Posteriormente, foi publicada em 2008 ([4]) por Falceto e Zambon uma extensão do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu, onde os autores provaram que as condições originais impostas em [12] eram, na realidade, demasiado restritivas, conseguindo desta forma alargar o leque de variedades de Poisson redutíveis por distribuições.

Além de um estudo exaustivo dos três teoremas acima mencionados, apresentamos também os teoremas da redução da dinâmica de campos Hamiltonianos formulados por Marsden e Weinstein em [13] para o caso simplético (por ações de grupos de Lie) e, mais tarde, por Marsden e Ratiu em [12] para o caso das variedades de Poisson usando distribuições. Provamos ainda que a redução de variedades simpléticas com simetrias formulada por Marsden e Weinstein é de facto, tal como Marsden e Ratiu afirmam em [12], um caso particular da redução de variedades de Poisson usando distribuições.

Palavras-chave: redução de variedades simpléticas com simetrias; redução de variedades de Poisson usando distribuições; redução da dinâmica

Abstract

In this work, a systematic study was carried out on the reduction of differential manifolds structures, namely the reduction of symplectic manifolds with symmetries, initially presented by Marsden and Weinstein in 1974 ([13]) and the reduction of Poisson manifolds using distributions, formulated by Marsden and Ratiu in 1986 ([12]). It was later published in 2008 ([4]) by Falceto and Zambon an extension of the Marsden & Ratiu Reduction Theorem, where the authors proved that the original conditions imposed on [12] were, in reality, too restrictive, thus increasing the range of Poisson manifolds reducible by distributions.

In addition to an exhaustive study of the three theorems mentioned above, we also present the dynamic reduction theorems of Hamiltonian vector fields formulated by Marsden and Weinstein in [13] for the symplectic case (by Lie group actions) and later, by Marsden and Ratiu in [12] for the case of Poisson manifolds using distributions. We also prove that the reduction of symplectic manifolds with symmetries formulated by Marsden and Weinstein is in fact, as Marsden and Ratiu state in [12], a particular case of the reduction of Poisson manifolds using distributions.

Keywords: reduction of symplectic manifolds with symmetries; reduction of Poisson manifolds using distributions; reduction of dynamics

Conteúdo

Lista de abreviaturas

M	variedade diferenciável, de dimensão finita
T_pM	espaço tangente a M no ponto p
TM	fibrado tangente a M
T_p^*M	espaço cotangente a M no ponto p
T^*M	fibrado cotangente a M
$C^\infty(M)$	conjunto das funções $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞
$\mathrm{Dif}(M)$	conjunto dos difeomorfimos de M em M
$\mathcal{X}(M)$	conjunto dos campos de vetores de M
$\Omega^k(M)$	conjunto das k-formas diferenciais em M, com $k \geq 0$
$\Gamma(\wedge^2 TM)$	conjunto das secções do fibrado $TM \wedge TM$
V^*	espaço dual do espaço vetorial V
$\langle\ ,\ \rangle$	avaliação de V^* em V, isto é, $\langle \alpha, u \rangle = \alpha(u),$ com $\alpha \in V^*$ e $u \in V$
$S \leq V$	subespaço vetorial do espaço vetorial V
S^0	anulador de $S \leq V$, $S^0 = \{\alpha \in V^* : \langle \alpha, u \rangle = 0, \forall u \in S\}$

Introdução

A geometria de Poisson teve as suas origens em meados do século XIX com o trabalho do matemático Siméon Poisson, tendo as suas teorias sido reformuladas e simplificadas posteriormente por Carl Jacobi, ainda ao longo do mesmo século. Com os avanços feitos na geometria diferencial moderna nas primeiras décadas do século XX, é o matemático André Lichnerowicz quem, em 1977, introduz pela primeira vez o conceito de estrutura de Poisson, enquanto objeto geométrico, em variedades diferenciáveis ([10]). Pouco depois, em 1983, é publicado o famoso artigo do matemático Alan Weinstein sobre a estrutura local de variedades de Poisson ([17]), onde o autor prova vários resultados basilares da área que permaneciam, até aí, sem demonstração. Este artigo teve uma grande influência e motivou muito do trabalho desenvolvido neste ramo da matemática nas décadas subsequentes.

A redução de estruturas em variedades diferenciáveis, mais especificamente em variedades de Poisson, tem inúmeras aplicações, tanto em matemática como em física, sendo uma área da geometria diferencial que continua a gerar frutos na investigação científica. Existem muitos tipos de redução sendo talvez a redução de variedades simpléticas com simetrias, formulada inicialmente pelos matemáticos Jerrold Marsden e Alan Weinstein em 1974 ([13]), cuja motivação remonta a problemas da mecânica Hamiltoniana, uma das mais famosas. Em 1986, os matemáticos Jerrold Marsden e Tudor Ratiu publicaram um artigo sobre redução de variedades de Poisson ([12]), onde começam por referir a redução de variedades simpléticas com simetrias publicada em [13], tendo este artigo, aparentemente, servido de motivação aos resultados por eles apresentados. Mais tarde, já em 2008, é publicado um artigo por Fernando Falceto e Marco Zambon ([4]) que vem fornecer uma extensão do teorema da redução de variedades de Poisson de Marsden e Ratiu.

Esta dissertação tem como principal foco o estudo de alguns resultados em redução de estruturas em variedades diferenciáveis, nomeadamente de variedades simpléticas e de Poisson, com recurso, respetivamente, a ações de grupos de Lie e a distribuições. A estrutura deste trabalho está organizada em quatro partes: três capítulos dedicados a redução de estruturas em variedades diferenciáveis e um apêndice com alguns tópicos auxiliares.

Cada capítulo aborda um artigo relacionado com redução, tendo o foco do nosso trabalho recaído nos três artigos acima mencionados. O estudo de tais artigos surge de forma cronológica, de acordo com o ano de publicação.

No primeiro capítulo começamos por apresentar várias definições e resultados da geometria simplética e da teoria de grupos de Lie para contextualizar, fixar notações e, acima de tudo, definir convenções de sinal relativamente a alguns conceitos da área. Após preliminares, apresentamos uma secção sobre ações de grupos de Lie, onde são introduzidos alguns conceitos e resultados relevantes para o trabalho que lhe sucede. Por fim, estudamos o teorema da redução de variedades simpléticas com simetrias, formulado por Marsden e Weinstein no seu artigo de 1974 ([13]), bem como o teorema da redução da dinâmica de campos de vetores Hamiltonianos, formulado na mesma publicação.

No segundo capítulo introduzimos inicialmente alguns conceitos e resultados da geometria de Poisson e da teoria das distribuições, sucedendo-se o estudo do teorema da redução de variedades de Poisson, formulado por Marsden e Ratiu em 1986 ([12]). Analogamente ao sucedido no capítulo 1, também neste capítulo é estudado o teorema da redução da dinâmica de campos de vetores Hamiltonianos neste contexto. Por último, na secção 2.5, são verificadas todas as condições que demonstram que a redução de variedades simpléticas com simetrias de Marsden e Weinstein é, na realidade, um caso particular da redução de variedades de Poisson de Marsden e Ratiu, muito embora os autores não o tenham provado. Um agradecimento especial ao Professor Marco Zambon, cuja troca de e-mails ajudou a desbloquear ideias e a concluir uma parte crucial dessa prova.

No terceiro capítulo começamos por revisitar o teorema da redução de Marsden e Ratiu à luz do trabalho apresentado por Falceto e Zambon em 2008 ([4]), seguindo-se o estudo de um resultado que vem levantar uma das hipóteses desse teorema, tornando a nova versão mais abrangente que a original. Por último apresentamos dois exemplos de variedades de Poisson redutíveis segundo o teorema de Falceto e Zambon mas não segundo o teorema de Marsden e Ratiu.

Terminamos com um apêndice formado por tópicos nas áreas de variedades diferenciáveis e álgebra linear, onde são estabelecidas notações, convenções de sinal e alguns lemas básicos que visam clarificar detalhes no trabalho que o antecede.

As provas apresentadas ao longo desta dissertação que não estejam referenciadas são da nossa autoria, muito embora, certamente, não originais. As restantes provas, embora referenciadas, são aqui apresentadas para colmatar a falta de detalhe apresentado na bibliografia ou pela sua relevância para o trabalho subsequente.

Capítulo 1

Redução de variedades simpléticas com simetrias

Neste capítulo vamos estudar o teorema da redução de variedades simpléticas com simetrias, inicialmente formulado por Marsden e Weinstein em [13], que denominaremos por Teorema da Redução de Marsden & Weinstein. Dito de uma maneira informal, o teorema não só garante que, sob certas condições, é possível construir uma nova variedade simplética de dimensão inferior à da variedade simplética original, onde a estrutura reduzida se relaciona com a estrutura original de uma forma "natural", como também nos diz qual o seu "aspeto". A motivação por trás do surgimento de tal teoria assenta em problemas da mecânica Hamiltoniana e vem generalizar um teorema clássico de Emmy Noether garantindo, sob certas condições, que o estudo da dinâmica de um campo de vetores Hamiltoniano pode ser feito num espaço de dimensão inferior, o que vem trazer vantagens significativas no que toca à complexidade de um tal problema.

Para um melhor entendimento dos conceitos envolvidos na formulação do Teorema da Redução de Marsden & Weinstein e respetiva demonstração, seguem-se duas secções com conceitos e resultados de geometria simplética, teoria de grupos de Lie e ações de grupos de Lie.

1.1 Variedades simpléticas e grupos de Lie

Esta secção, juntamente com o apêndice A, nada mais é do que uma coleção de definições, conceitos e resultados que, embora possam ser vistos num curso de variedades diferenciáveis ou geometria simplética ao nível do mestrado, dada a sua relevância para o estudo que lhes sucede optamos por aqui apresentar.

Contudo, o que torna esta secção e o apêndice A realmente importantes é, acima de tudo, a necessidade de se fixar uma convenção de sinais relativamente a certos conceitos de variedades diferenciáveis e geometria simplética de forma a tornar a leitura desta dissertação o mais coerente possível. De facto, não há uma forma única e universal de o fazer, como se pode ler em [14] (pág. 98, nota 3.1.6), estando tais escolhas de sinal sujeitas ao gosto particular de cada autor, quer em livros, quer em artigos da área.

Ao longo de todo este trabalho usaremos maioritariamente as convenções adotadas por Libermann e Marle em [9], o que, por vezes, poderá levar a alterações de sinal relativamente a alguns resultados ou exemplos presentes nos artigos em estudo, mas que em nada interferirão na veracidade dos mesmos. Sempre que tal se justifique, os resultados dependentes de tais escolhas serão demonstrados.

Aconselhamos a consulta do apêndice A para uma completa clarificação das convenções escolhidas, em particular na definição do parêntesis de Lie e ações de difeomorfimos sobre campos de vetores e k-formas diferenciais.

1.1.1 Variedades simpléticas

Definição 1.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável e $\omega \in \Omega^2(M)$. Ao par (M, ω) dá-se o nome de variedade simplética se*

- *$d\omega = 0$, isto é, ω é uma 2-forma diferencial fechada;*
- *ω é não-degenerada, isto é,*

$$\omega(X, Y) = 0, \forall X \in \mathcal{X}(M) \iff Y = 0 \in \mathcal{X}(M).$$

M terá, necessariamente, dimensão par.

De seguida apresentamos algumas definições que dependem da convenção de sinais falada no início desta secção.

Definição 1.1.2. *Seja (M, ω) uma variedade simplética. Define-se o seguinte isomorfismo de módulos*

$$\begin{aligned} \omega^\flat : \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ X &\longmapsto -i_X\omega, \end{aligned}$$

onde $i_X\omega$ representa a contração de ω com X, isto é,

$$(i_X\omega)(Y) = \omega(X, Y), \quad \forall Y \in \mathcal{X}(M).$$

Definição 1.1.3. *Seja (M, ω) uma variedade simplética. O campo de vetores $X \in \mathcal{X}(M)$ diz-se*

- *Hamiltoniano se existir $f \in C^\infty(M)$ tal que*

  $$\omega^\flat(X) = df,$$

  denotando-se um tal campo por X_f;

- *simplético se* $d(i_X\omega) = 0$.

De notar que todos os campos Hamiltonianos são, por definição, simpléticos, uma vez que $d \circ d = 0$.

Nota 1.1.4. *Na definição de campo Hamiltoniano, se existir,* f *não é única, uma vez que* $f + c$*, com* $c \in \mathbb{R}$*, satisfaz a mesma condição. Por outro lado, como* $\omega^\flat$ *é um isomorfismo de módulos, dada* $f \in C^\infty(M)$*, existe um e um só* $X_f \in \mathcal{X}(M)$ *tal que* $i_{X_f}\omega = -df$.

A proposição seguinte pode ser encontrada em [9] (pág. 97, proposição 4.4):

Proposição 1.1.5. *Seja* (M, ω) *uma variedade simplética. Dado um campo de vetores* $X \in \mathcal{X}(M)$ *e* σ_t *o seu fluxo, vale a equivalência*

$$X \text{ é simplético } \iff \sigma_t \in \mathit{Simp}(M), \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $\mathit{Simp}(M)$ *representa o grupo dos simplectomorfismos de* M*, isto é,*

$$\mathit{Simp}(M) = \{\varphi \in \mathit{Dif}(M) : \varphi^*\omega = \omega\}.$$

Definição 1.1.6. *Seja* (M, ω) *uma variedade simplética. Ao parêntesis*

$$\begin{aligned} \{\ ,\ \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (f, h) &\longmapsto \{f, h\} \end{aligned}$$

definido por

$$\{f, h\} = \omega(X_f, X_h) = dh(X_f)$$

dá-se o nome de parêntesis de Poisson determinado por ω.

O teorema seguinte pode ser encontrado em [9] (pág. 51, teorema 17.1) e garante a existência de coordenadas simpléticas locais em qualquer ponto de qualquer variedade simplética, sendo um dos mais importantes resultados da área:

Teorema 1.1.7 (Teorema de Darboux)**.** *Seja* (M, ω) *uma variedade simplética de dimensão* $2n$*. Então, dado* $p \in M$*, existe uma vizinhança aberta* $U \subseteq M$ *de* p *e um sistema de coordenadas locais* $\{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n\}$ *no qual* ω *é dada localmente por*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Tais coordenadas são chamadas de coordenadas simpléticas locais.

Lema 1.1.8. *Seja* (M, ω) *uma variedade simplética e* $\{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n\}$ *um sistema de coordenadas simpléticas locais em* $U \subseteq M$*. Então, dada uma função* $f \in C^\infty(M)$*, o campo Hamiltoniano* X_f *é dado localmente por*

$$X_f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Demonstração. Seja $\{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n\}$ um sistema de coordenadas simpléticas locais em $U \subseteq M$, isto é, um sistema de coordenadas locais tal que

$$\begin{cases} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \delta_{ij} \\ \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = 0 \end{cases}, \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Equivalentemente, a forma simplética ω é dada localmente por

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i. \tag{1.1}$$

Como $X_f \in \mathcal{X}(M)$, existem $c_i, d_i \in C^\infty(U)$, com $i \in \{1, ..., n\}$, tais que

$$X_f = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i \frac{\partial}{\partial x_i} + d_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right).$$

Relembrando a definição de campo Hamiltoniano, tem-se

$$\omega(X_f, Y) = -df(Y), \quad \forall Y \in \mathcal{X}(M).$$

Assim, escolhendo $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$ e considerando a escrita de ω dada em (1.1), obtém-se

$$-d_j = \omega\left(X_f, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial f}{\partial x_j},$$

e escolhendo $Y = \frac{\partial}{\partial y_j}$ obtém-se

$$c_j = \omega\left(X_f, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -df\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial f}{\partial y_j},$$

de onde se conclui que

$$\begin{cases} d_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ c_j = -\frac{\partial f}{\partial y_j} \end{cases}, \quad \forall j \in \{1, ..., n\}.$$

□

Nota 1.1.9. *Recorrendo ao lema 1.1.8, as equações diferenciais para o fluxo de* X_f *em coordenadas simpléticas locais* $\{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n\}$ *são*

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -\frac{\partial f}{\partial y_i} \\ \dot{y}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{cases}, \quad \textit{com } i \in \{1, ..., n\},$$

que são simétricas das equações de Hamilton. Para evitar esta troca de sinal muitos autores usam outras convenções de sinal.

1.1.2 Grupos de Lie

Definição 1.1.10. *Um grupo* $(G, .)$ *diz-se um grupo de Lie se* G *é uma variedade diferenciável e as aplicações*

$$\begin{array}{ccc} G \times G \longrightarrow G & \qquad & G \longrightarrow G \\ (g,h) \longmapsto g.h & \qquad & g \longmapsto g^{-1} \end{array}$$

são diferenciáveis. Denota-se por e *o elemento neutro do grupo.*

Nota 1.1.11. *A partir de agora, e até ao final deste trabalho, assumiremos que* G *é conexo e de dimensão finita.*

Definição 1.1.12. *Dado um grupo de Lie* $(G, .)$*, o par* $(\mathcal{G}, [[\ ,\ ]])$*, com*

- $\mathcal{G} = T_eG$*;*
- $[[\xi, \eta]] = \left[\hat{\xi}, \hat{\eta}\right](e)$*,*

diz-se a álgebra de Lie de $(G, .)$*, onde*

- $[\ ,\ ]$ *representa o parêntesis de Lie em* $\mathcal{X}(G)$*, definido como em A.0.11;*
- $\hat{\xi}$ *é o único campo de vetores de* G *invariante à esquerda, isto é,*

  $$L_g \cdot \hat{\xi} = \hat{\xi}, \quad \forall g \in G,$$

  tal que $\hat{\xi}(e) = \xi$*, onde*

  $$\begin{array}{rcl} L_g : G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & g.h \end{array}$$

  é o difeomorfismo "produto à esquerda por g*".*

Denotaremos por $\mathcal{X}_L(G)$ o espaço dos campos de vetores de G invariantes à esquerda. A partir da definição pode-se observar que um campo de vetores $\hat{\xi} \in \mathcal{X}_L(G)$ fica totalmente determinado pelo seu valor em e, já que

$$\hat{\xi}(g) = (dL_g)_e(\hat{\xi}(e)), \quad \forall g \in G.$$

Definição 1.1.13. *Seja* $(G, .)$ *um grupo de Lie e* $(\mathcal{G}, [[\ ,\ ]])$ *a álgebra de Lie de* G*. Chama-se exponencial em* G *à aplicação*

$$\begin{array}{rcl} exp : \mathcal{G} & \longrightarrow & G \\ \xi & \longmapsto & \sigma_1(e), \end{array}$$

onde σ_t *representa o fluxo de* $\hat{\xi}$*, campo determinado por* ξ *como definido em 1.1.12.*

O fluxo σ_t referido acima é global, uma vez que qualquer campo de vetores invariante à esquerda é completo, como pode ser visto em [9] (apêndice 5, pág. 415, proposição 2.2).

As propriedades apresentadas no lema seguinte podem ser encontradas em [9] (pág. 417, apêndice 5, proposição 2.5).

Lema 1.1.14. *Seja $(G, .)$ um grupo de Lie e $(\mathcal{G}, [[\ ,\ ]])$ a álgebra de Lie de G. A aplicação exponencial tem as seguintes propriedades:*

1. $exp(t\xi) = \sigma_t(e), \quad \forall t \in \mathbb{R};$

2. $exp((t+s)\xi) = exp(t\xi).exp(s\xi), \quad \forall t, s \in \mathbb{R},$

onde σ_t é o fluxo de $\hat{\xi}$. Em particular,

$$\left.\frac{d(exp(t\xi))}{dt}\right|_{t=0} = \hat{\xi}(e) = \xi.$$

1.2 Ações de grupos de Lie

1.2.1 Noções gerais

Definição 1.2.1. *Sejam M uma variedade diferenciável e $(G, .)$ um grupo de Lie. Chama-se ação (à esquerda) de G em M a um homomorfismo (suave) de grupos*

$$\begin{aligned} \Psi : (G, .) &\longrightarrow (Dif(M), \circ) \\ g &\longmapsto \Psi_g, \end{aligned}$$

isto é,

$$\Psi_{g.h}(p) = \Psi_g \circ \Psi_h(p), \quad \forall g, h \in G, \forall p \in M.$$

Nota 1.2.2. *Nas condições da definição anterior, é fácil verificar que*

$$\Psi_e = id_M,$$

de onde resulta que

$$(\Psi_g)^{-1} = \Psi_{g^{-1}}.$$

Definição 1.2.3. *Nas condições da definição 1.2.1, seja Ψ uma ação de G em M. Dado $\xi \in \mathcal{G}$, dá-se o nome de campo fundamental de ξ ao campo de vetores $\dot{\Psi}(\xi) \in \mathcal{X}(M)$ definido por*

$$\dot{\Psi}(\xi)(p) = \left.\frac{d(\Psi_{exp(-t\xi)}(p))}{dt}\right|_{t=0}.$$

Nota 1.2.4. *Nas condições da definição anterior, $\Psi_{exp(-t\xi)}$ é o fluxo do campo de vetores $\dot{\Psi}(\xi)$.*

A partir de agora, se nada for dito em contrário, $(G,.)$ representa um grupo de Lie (conexo), $(\mathcal{G},[[\,,]])$ a álgebra de Lie de $(G,.)$, M uma variedade diferenciável (não necessariamente simplética) e

$$\begin{aligned}\Psi:(G,.) &\longrightarrow (\mathrm{Dif}(M),\circ)\\ g &\longmapsto \Psi_g\end{aligned}$$

uma ação (à esquerda) de G em M. Sempre que a variedade diferenciável em questão for simplética, será representada por (M,ω).

Definição 1.2.5. *Uma função $f\in C^\infty(M)$ diz-se G-invariante se for invariante pela ação Ψ, isto é, se*

$$f\circ\Psi_g=f,\quad \forall g\in G.$$

Definição 1.2.6. *A representação adjunta de G em $\mathcal{G}$ é dada por*

$$\begin{aligned}Ad:(G,.) &\longrightarrow (\{\mathcal{A}:\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}\mid \mathcal{A}\ \textit{isomorfismo}\ \mathbb{R}\textit{-linear}\},\circ)\\ g &\longmapsto Ad_g,\end{aligned}$$

onde $Ad_g=(dC_g)_e$, sendo C_g a conjugação por $g\in G$, isto é,

$$\begin{aligned}C_g:G &\longrightarrow G\\ h &\longmapsto g.h.g^{-1}.\end{aligned}$$

Nota 1.2.7. *A representação adjunta acima definida é, na realidade, uma ação como definida em 1.2.1. Como qualquer isomorfismo $\mathbb{R}$-linear é, em particular, um difeomorfismo, para verificar que Ad é uma ação (à esquerda), basta ver que, dados $g,h\in G$ e $\xi\in\mathcal{G}$ quaisquer, se tem*

$$Ad_{g.h}(\xi)=Ad_g\circ Ad_h(\xi).$$

Ora,

$$Ad_g\circ Ad_h(\xi)=(dC_g)_e\circ(dC_h)_e(\xi)=d(C_g\circ C_h)_e(\xi).$$

Mas como, dado $f\in G$, se tem

$$C_g\circ C_h(f)=C_g(h.f.h^{-1})=g.h.f.h^{-1}.g^{-1}=(g.h).f.(g.h)^{-1}=C_{g.h}(f),$$

conclui-se que

$$d(C_g\circ C_h)_e(\xi)=(dC_{g.h})_e(\xi)=Ad_{g.h}(\xi),$$

ficando assim provado que Ad é, de facto, uma ação (à esquerda) de G em $\mathcal{G}$.

Definição 1.2.8. *A representação adjunta de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{G}$ é dada por*

$$\begin{aligned}ad:\mathcal{G} &\longrightarrow (\{\mathcal{L}:\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}\mid \mathcal{L}\ \mathbb{R}\textit{-linear}\},\circ)\\ \xi &\longmapsto ad_\xi,\end{aligned}$$

onde

$$ad_\xi(\eta)=[[\xi,\eta]].$$

Definição 1.2.9. *A ação co-adjunta de G em $\mathcal{G}^*$ é dada por*

$$\begin{aligned} Ad* : (G, .) &\longrightarrow (\{\mathcal{A} : \mathcal{G}^* \longrightarrow \mathcal{G}^* \mid \mathcal{A} \text{ isomorfismo } \mathbb{R}\text{-linear}\}, \circ) \\ g &\longmapsto Ad*_g, \end{aligned}$$

onde

$$\langle Ad*_g(\alpha), \xi \rangle = \left\langle \alpha, Ad_{g^{-1}}(\xi) \right\rangle, \quad \forall \alpha \in \mathcal{G}^*, \forall \xi \in \mathcal{G}.$$

Segue-se agora um lema que nos dá propriedades importantes a serem usadas mais adiante.

Lema 1.2.10. *Dados $g \in G$ e $\xi, \eta \in \mathcal{G}$ quaisquer e uma ação Ψ de G em M, tem-se*

1. $Ad_{exp(t\xi)}(\xi) = \xi$, $\forall t \in \mathbb{R}$;

2. $\left.\frac{d(Ad_{exp(t\xi)}(\eta))}{dt}\right|_{t=0} = ad_\xi(\eta)$;

3. $\Psi_g \cdot \dot{\Psi}(\xi) = \dot{\Psi}(Ad_g(\xi))$, *onde* $\Psi_g \cdot \dot{\Psi}(\xi)$ *é a ação de* Ψ_g *sobre o campo* $\dot{\Psi}(\xi)$ *como definido em A.0.5.*

Demonstração. As provas dos pontos 2 e 3 serão remetidas para [9] (pág. 426, apêndice 5, corolário 4.5, caso particular $t_0 = 0$ e proposição 4.4, respetivamente). Vamos então provar o ponto 1.

Seja $\sigma_t(e)$ a curva integral de $\hat{\xi}$ por e, isto é,

- $\sigma_0(e) = e$;

- $\frac{d(\sigma_t(e))}{dt} = \hat{\xi}(\sigma_t(e)), \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Então, em particular,

$$\left.\frac{d(\sigma_t(e))}{dt}\right|_{t=0} = \hat{\xi}(e) = \xi.$$

Considerando o lema 1.1.14 tem-se, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
Ad_{exp(t_0\xi)}(\xi) &= \left(dC_{exp(t_0\xi)}\right)_e(\xi) \\
&= \left(dC_{exp(t_0\xi)}\right)_e \left(\left.\frac{d(\sigma_t(e))}{dt}\right|_{t=0} \right) \\
&= \left.\frac{d(C_{exp(t_0\xi)} \circ \sigma_t(e))}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{d(exp(t_0\xi).exp(t\xi).exp(-t_0\xi))}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{d(exp((t_0+t-t_0)\xi))}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{d(exp(t\xi))}{dt}\right|_{t=0} = \hat{\xi}(e) = \xi,
\end{aligned}$$

finalizando-se assim a prova. □

Lema 1.2.11. *Para cada $g \in G$, $Ad_g : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, isto é,*

- *é $\mathbb{R}$-linear;*
- $Ad_g([[\xi,\eta]]) = [[Ad_g(\xi), Ad_g(\eta)]], \quad \forall \xi,\eta \in \mathcal{G}.$

Demonstração. Fixe-se $g \in G$. A $\mathbb{R}$-linearidade de Ad_g resulta diretamente da definição, uma vez que

$$Ad_g = (dC_g)_e$$

e a diferencial de qualquer aplicação num ponto é $\mathbb{R}$-linear. Falta ver que

$$Ad_g([[\xi,\eta]]) = [[Ad_g(\xi), Ad_g(\eta)]], \quad \forall \xi,\eta \in \mathcal{G}.$$

Sejam $\xi, \eta \in \mathcal{G}$ quaisquer. Então, recorrendo ao lema 1.2.10, à $\mathbb{R}$-linearidade de Ad_g, à definição A.0.5 e à nota 1.2.4, tem-se

$$\begin{aligned}
Ad_g([[\xi,\eta]]) &= Ad_g(ad_\xi(\eta)) \\
&= Ad_g\left(\left.\frac{d(Ad_{exp(t\xi)}(\eta))}{dt}\right|_{t=0}\right) \\
&= \left.\frac{d(Ad_g \circ Ad_{exp(t\xi)}(\eta))}{dt}\right|_{t=0} \\
&= (dAd_g)_\eta\left(\left.\frac{d(Ad_{exp(t\xi)}(\eta))}{dt}\right|_{t=0}\right) \\
&= dAd_g(\dot{A}d(-\xi))(\eta) \\
&= dAd_g(\dot{A}d(-\xi)) \circ Ad_{g^{-1}}(Ad_g(\eta)) \\
&= (Ad_g \cdot \dot{A}d(-\xi))(Ad_g(\eta)) \\
&= \dot{A}d(Ad_g(-\xi))(Ad_g(\eta)) \\
&= \left.\frac{d(Ad_{exp(tAd_g(\xi))}(Ad_g(\eta)))}{dt}\right|_{t=0} \\
&= ad_{Ad_g(\xi)}(Ad_g(\eta)) \\
&= [[Ad_g(\xi), Ad_g(\eta)]],
\end{aligned}$$

ficando assim concluída a prova. □

Lema 1.2.12. *Dada uma ação Ψ de G em M, a aplicação $\dot{\Psi} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, isto é,*

- *é $\mathbb{R}$-linear;*
- $\dot{\Psi}([[\xi,\eta]]) = \left[\dot{\Psi}(\xi), \dot{\Psi}(\eta)\right], \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}.$

Demonstração. Fixado $p \in M$, considere-se a aplicação

$$\begin{aligned}
\varphi_p : G &\longrightarrow M \\
g &\longmapsto \Psi_g(p).
\end{aligned}$$

Então, dado $\xi \in \mathcal{G}$ e recorrendo ao lema 1.1.14, tem-se

$$
\begin{aligned}
\dot{\Psi}(\xi)(p) &= \left.\frac{d(\Psi_{exp(-t\xi)}(p))}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{d(\varphi_p(exp(-t\xi)))}{dt}\right|_{t=0} \\
&= (d\varphi_p)_e \left(\left.\frac{d(exp(t(-\xi)))}{dt}\right|_{t=0} \right) \\
&= (d\varphi_p)_e \left(\left.\frac{d(\sigma_t(e))}{dt}\right|_{t=0} \right) \\
&= (d\varphi_p)_e(-\xi) = -(d\varphi_p)_e(\xi),
\end{aligned}
$$

onde $\sigma_t(e)$ representa a curva integral de $-\hat{\xi}$ por e. Assim, fixado $p \in M$, tem-se

$$
\dot{\Psi}(\xi)(p) = -(d\varphi_p)_e(\xi), \quad \forall \xi \in \mathcal{G},
$$

de onde resulta a $\mathbb{R}$-linearidade de $\dot{\Psi}$.

Falta agora ver que

$$
\dot{\Psi}([[\xi, \eta]]) = \left[\dot{\Psi}(\xi), \dot{\Psi}(\eta) \right], \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}.
$$

Sejam $p \in M$ e $\xi, \eta \in \mathcal{G}$ quaisquer. Então, tendo em conta o lema A.0.12, a definição de derivada de Lie de um campo de vetores dada em A.0.9, a nota 1.2.4, o lema 1.2.10 e a $\mathbb{R}$-linearidade de $\dot{\Psi}$ já provada, tem-se

$$
\begin{aligned}
\left[\dot{\Psi}(\xi), \dot{\Psi}(\eta) \right](p) &= \left(\mathcal{L}_{\dot{\Psi}(\xi)} \dot{\Psi}(\eta) \right)(p) \\
&= \left.\frac{d\left(\left(\Psi^{-1}_{exp(-t\xi)} \cdot \dot{\Psi}(\eta) \right)(p) \right)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{d\left(\left(\Psi_{exp(t\xi)} \cdot \dot{\Psi}(\eta) \right)(p) \right)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{d\left(\dot{\Psi}\left(Ad_{exp(t\xi)}(\eta) \right)(p) \right)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \dot{\Psi} \left(\left.\frac{d\left(Ad_{exp(t\xi)}(\eta) \right)}{dt}\right|_{t=0} \right)(p) \\
&= \dot{\Psi}([[\xi, \eta]])(p),
\end{aligned}
$$

ficando assim concluída a prova. $\square$

Definição 1.2.13. *Dado $p \in M$, dá-se o nome de órbita de p pela ação Ψ de G em M ao conjunto*

$$\mathcal{O}_p = \{\Psi_g(p) : g \in G\} \subseteq M.$$

Mais tarde iremos usar a notação $[p]$ para designar $\mathcal{O}_p$ pois a relação $\sim$ definida por

$$p \sim q \iff \mathcal{O}_p = \mathcal{O}_q$$

é, de facto, uma relação de equivalência.

Definição 1.2.14. *Dá-se o nome de subgrupo de isotropia de p pela ação Ψ ao subgrupo de G*

$$G_p = \{g \in G : \Psi_g(p) = p\}.$$

Os argumentos usados para provar o lema seguinte podem ser encontrados em [9] (apêndice 5, pág. 422, 3.10), onde os autores recorrem ao Teorema de Cartan.

Lema 1.2.15. *Nas condições da definição 1.2.14, G_p é um subgrupo de Lie de $(G, .)$.*

Uma vez que G_p é um subgrupo de Lie de $(G, .)$, é natural perguntar se conseguimos especificar os elementos que compõem a álgebra de Lie que lhe está associada. A resposta é sim e tal resultado pode ser encontrado em [9] (apêndice 5, pág. 422, proposição 3.11), onde os autores remetem para [6]:

Lema 1.2.16. *À álgebra de Lie de G_p dá-se o nome de álgebra de isotropia de p e é dada por*

$$\mathcal{G}_p = \left\{\xi \in \mathcal{G} : \dot{\Psi}(\xi)(p) = \overrightarrow{0}\right\}.$$

Mais ainda, $\mathcal{G}_p$ é uma sub-álgebra de Lie de $\mathcal{G}$.

Definição 1.2.17. *O conjunto*

$$M/G = \{\mathcal{O}_p : p \in M\}$$

diz-se o espaço das órbitas pela ação Ψ.

Definição 1.2.18. *A ação Ψ diz-se*

- *livre, se todo o subgrupo de isotropia for trivial, isto é,*

$$G_p = \{e\}, \quad \forall p \in M;$$

- *própria, se a imagem recíproca de um compacto pela aplicação*

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \times M \\ (g, p) &\longmapsto (p, \Psi_g(p)) \end{aligned}$$

  for compacta.

Em particular, a ação é própria se G for compacto ou se $M = G$ e a ação for a multiplicação no grupo. A proposição que se segue, bem como a respetiva demonstração, podem ser encontradas em [1] (pág. 266, proposição 4.1.23).

Proposição 1.2.19. *Se a ação Ψ for livre e própria, M/G admite uma (única) estrutura de variedade diferenciável para a qual a projeção*

$$\begin{aligned} \pi : M &\longrightarrow \quad M/G \\ p &\longmapsto \quad \mathcal{O}_p \end{aligned}$$

é uma submersão sobrejetiva.

Assumindo que Ψ atua de forma livre e própria sobre M, a proposição 1.2.19 garante que $\mathcal{O}_p$ é uma subvariedade mergulhada de M, já que $\mathcal{O}_p \subseteq M$ é a imagem inversa por π de $\mathcal{O}_p = [p] \in M/G$, valor regular de π.

A proposição seguinte surge em [9] (apêndice 5, pág. 422, proposição 3.11), onde os autores remetem para [6].

Proposição 1.2.20. *A órbita $\mathcal{O}_p$ admite uma estrutura de variedade diferenciável (subvariedade imersa de M) para a qual o espaço tangente à órbita de $p \in M$ num ponto $q \in \mathcal{O}_p$ é dado por*

$$T_q\mathcal{O}_p = \left\{ \dot{\Psi}(\xi)(q) : \xi \in \mathcal{G} \right\}.$$

Demonstração. A existência de uma estrutura diferenciável em $\mathcal{O}_p$ é remetida para a referência dada acima. Sejam $q = \Psi_g(p) \in \mathcal{O}_p$ e $\xi \in \mathcal{G}$ quaisquer. Como

$$\dot{\Psi}(\xi)(q) = \left. \frac{d\left(\Psi_{\exp(-t\xi)}(q)\right)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\left(\Psi_{\exp(-t\xi).g}(p)\right)}{dt} \right|_{t=0},$$

e atendendo a que

$$\begin{aligned} \gamma : \ ]-\epsilon, \epsilon[&\longrightarrow \quad \mathcal{O}_p \\ t &\longmapsto \quad \Psi_{\exp(-t\xi).g}(p) \end{aligned}$$

é uma curva (suave) em $\mathcal{O}_p$ satisfazendo

$$\gamma(0) = q,$$

fica provado que

$$\dot{\Psi}(\xi)(q) \in T_q\mathcal{O}_p.$$

Para a inclusão contrária, considere-se a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_p : G &\longrightarrow \quad \mathcal{O}_p \\ g &\longmapsto \quad \Psi_g(p). \end{aligned}$$

Comecemos por provar as seguintes propriedades:

1. $\Psi_g \circ \varphi_p = \varphi_p \circ L_g, \quad \forall g \in G;$

2. $T_g G = (dL_g)_e(\mathcal{G}), \quad \forall g \in G.$

Sejam $h, g \in G$ quaisquer. Então,

$$\Psi_g \circ \varphi_p(h) = \Psi_g \circ \Psi_h(p) = \Psi_{g.h}(p) = \varphi_p(g.h) = \varphi_p \circ L_g(h),$$

ficando assim provada a primeira propriedade. Considere-se agora $\xi \in \mathcal{G}$ e $g \in G$. Então,

$$(dL_g)_e(\xi) = \hat{\xi}(g) \in T_g G,$$

de onde resulta a inclusão

$$(dL_g)_e(\mathcal{G}) \subseteq T_g G.$$

Como

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{X}_L(G) \\ \xi & \longmapsto & \hat{\xi} \end{array}$$

é uma bijeção, tem-se

$$\dim((dL_g)_e(\mathcal{G})) = \dim(\mathcal{G}) = \dim(G) = \dim(T_g G),$$

e tratando-se de espaços vetoriais, a segunda propriedade fica demonstrada.

Considerem-se agora $q = \Psi_g(p)$ e $u \in T_q \mathcal{O}_p$. Então, existe uma curva (suave) em G, $h :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow G$, com $h(0) = g$, tal que

$$u = \left. \frac{d\left(\Psi_{h(t)}(p)\right)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Assim, tendo em conta que

$$\left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=0} \in T_g G,$$

a propriedade 2 garante a existência de $\xi \in \mathcal{G}$ para o qual

$$\left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=0} = (dL_g)_e(\xi),$$

pelo que, recorrendo à propriedade 1, à definição A.0.5 e ao lema 1.2.10, se tem

$$
\begin{aligned}
u &= \left.\frac{d\left(\Psi_{h(t)}(p)\right)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{d\left(\varphi_p(h(t))\right)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left(d\varphi_p\right)_g\left((dL_g)_e(\xi)\right) \\
&= d\left(\varphi_p \circ L_g\right)_e\left(\left.\frac{d(exp(t\xi))}{dt}\right|_{t=0}\right) \\
&= d\left(\Psi_g \circ \varphi_p\right)_e\left(\left.\frac{d(exp(t\xi))}{dt}\right|_{t=0}\right) \\
&= \left(d\Psi_g\right)_p\left(\left.\frac{d\left(\varphi_p(exp(t\xi))\right)}{dt}\right|_{t=0}\right) \\
&= \left(d\Psi_g\right)_p\left(\left.\frac{d\left(\Psi_{exp(t\xi)}(p)\right)}{dt}\right|_{t=0}\right) \\
&= \left(d\Psi_g\right)_p\left(\dot{\Psi}(-\xi)(p)\right) \\
&= \left(\Psi_g \cdot \dot{\Psi}(-\xi)\right)(q) \\
&= \dot{\Psi}\left(Ad_g(-\xi)\right)(q).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$u \in \left\{\dot{\Psi}(\xi)(q) : \xi \in \mathcal{G}\right\}$$

e a segunda inclusão fica provada, concluindo-se assim a demonstração. $\square$

O lema que se segue dá-nos uma relação entre as dimensões de G, $\mathcal{O}_p$ e G_p, cuja utilidade será comprovada na secção 1.3.

Lema 1.2.21. *Dado $p \in M$, tem-se*

$$dim(G) = dim(\mathcal{O}_p) + dim(G_p).$$

Demonstração. Fixado $p \in M$, como, pelo lema 1.2.12,

$$
\begin{aligned}
\dot{\Psi}_p : \mathcal{G} &\longrightarrow \quad T_pM \\
\xi &\longmapsto \quad \dot{\Psi}(\xi)(p)
\end{aligned}
$$

é $\mathbb{R}$-linear, tem-se

$$\dim(\mathcal{G}) = \dim(\mathrm{Im}(\dot{\Psi}_p)) + \dim(\mathrm{Ker}(\dot{\Psi}_p)).$$

Mas como

$$\dot{\Psi}_p(\mathcal{G}) = T_p\mathcal{O}_p$$

e

$$\mathrm{Ker}(\dot{\Psi}_p) = \{\xi \in \mathcal{G} : \dot{\Psi}_p(\xi) = \overrightarrow{0}\} = \mathcal{G}_p,$$

conclui-se que

$$\dim(G) = \dim(T_p\mathcal{O}_p) + \dim(\mathcal{G}_p) = \dim(\mathcal{O}_p) + \dim(G_p).$$

$\square$

O lema seguinte dá-nos uma caracterização do espaço tangente ao espaço das órbitas.

Lema 1.2.22. *Nas condições da proposição 1.2.19, tem-se*

$$T_{\mathcal{O}_p}(M/G) \cong T_pM/T_p\mathcal{O}_p,$$

qualquer que seja $p \in M$.

Demonstração. Como, para todo $p \in M$,

$$d\pi_p : T_pM \longrightarrow T_{\mathcal{O}_p}(M/G)$$

é sobrejetiva, recorrendo ao 1º Teorema do Isomorfismo tem-se

$$T_{\mathcal{O}_p}(M/G) = \mathrm{Im}(d\pi_p) \cong T_pM/\mathrm{Ker}(d\pi_p).$$

Basta então provar que

$$\mathrm{Ker}(d\pi_p) = T_p\mathcal{O}_p.$$

Seja $u \in T_p\mathcal{O}_p$. Então, existe algum $\xi \in \mathcal{G}$ tal que $u = \dot{\Psi}(\xi)(p)$. Mas

$$\begin{aligned} d\pi_p(u) &= d\pi_p\left(\left.\frac{d\left(\Psi_{exp(-t\xi)}(p)\right)}{dt}\right|_{t=0}\right) \\ &= \left.\frac{d\left(\pi\left(\Psi_{exp(-t\xi)}(p)\right)\right)}{dt}\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d\left(\mathcal{O}_{\Psi_{exp(-t\xi)}(p)}\right)}{dt}\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d\left(\mathcal{O}_p\right)}{dt}\right|_{t=0} \\ &= \overrightarrow{0}, \end{aligned}$$

de onde se conclui que

$$T_p\mathcal{O}_p \subseteq \mathrm{Ker}(d\pi_p).$$

Agora, como π é uma submersão e $\mathcal{O}_p \subseteq M$ é imagem inversa por π do valor regular $\mathcal{O}_p = [p] \in M/G$, tem-se

$$\dim(\mathcal{O}_p) = \dim(M) - \dim(M/G).$$

Por outro lado, tem-se também

$$\dim(\mathrm{Ker}(d\pi_p)) = \dim(T_pM) - \dim(\mathrm{Im}(d\pi_p)),$$

ou seja,

$$\dim(\mathrm{Ker}(d\pi_p)) = \dim(T_pM) - \dim(T_{\mathcal{O}_p}(M/G)).$$

Usando agora o facto de que, dada uma variedade diferenciável qualquer, a sua dimensão coincide com a dimensão do espaço tangente à variedade em qualquer ponto, obtém-se

$$\dim(\mathrm{Ker}(d\pi_p)) = \dim(T_p\mathcal{O}_p),$$

de onde resulta, em conjunto com a inclusão acima provada, a igualdade entre os espaços vetoriais. □

1.2.2 Ações simpléticas e Hamiltonianas

Definição 1.2.23. *Uma ação Ψ de G em (M, ω) diz-se simplética se*

$$\Psi_g^*\omega = \omega, \quad \forall g \in G.$$

Definição 1.2.24. *Dada uma ação Ψ de G em (M, ω) se, para todo o $\xi \in \mathcal{G}$, o campo fundamental de ξ for um campo Hamiltoniano de (M, ω), então define-se*

- *aplicação co-momento da ação como sendo $J : \mathcal{G} \longrightarrow C^\infty(M)$ tal que, para todo $\xi \in \mathcal{G}$, se tem*
  1. *$\dot{\Psi}(\xi) = X_{J(\xi)}$, isto é, $i_{\dot{\Psi}(\xi)}\omega = -d(J(\xi))$;*
  2. *J é $\mathbb{R}$-linear.*
- *aplicação momento da ação como sendo $\mu : M \longrightarrow \mathcal{G}^*$, dada por*

  $$\langle \mu(p), \xi \rangle = J(\xi)(p),$$

  com J um co-momento da ação e $p \in M$ e $\xi \in \mathcal{G}$ quaisquer.

Nota 1.2.25. *Uma ação nas condições da definição acima admite infinitos co-momentos, bastando para tal somar a um co-momento elementos de $\mathcal{G}^*$.*

Definição 1.2.26. *Nas condições da definição 1.2.23, uma ação simplética Ψ diz-se*

- *quase-Hamiltoniana se admitir um co-momento* $J : \mathcal{G} \longrightarrow C^\infty(M)$*;*
- *Hamiltoniana se for quase-Hamiltoniana e algum seu co-momento* J *for um homomorfismo de álgebras de Lie, isto é,*

$$J([[\xi,\eta]]) = \{J(\xi), J(\eta)\}, \quad \forall \xi,\eta \in \mathcal{G}.$$

Segue-se um teorema bem conhecido de geometria simplética, que pode ser encontrado em [9] (pág. 197, teorema 2.6) e que vem dar-nos a versão simplética de um teorema clássico da mecânica Hamiltoniana formulado por Emmy Noether:

Teorema 1.2.27. *Seja* Ψ *uma ação quase-Hamiltoniana de* G *em* (M,ω)*, com co-momento*

$$J : \mathcal{G} \longrightarrow C^\infty(M)$$

e considere-se uma função G*-invariante* $h \in C^\infty(M)$*. Então, para todo* $\xi \in \mathcal{G}$*, tem-se*

$$J(\xi) \circ \sigma_t(p) = J(\xi)(p), \quad \forall p \in M, \forall t \in I_p,$$

onde σ_t *representa o fluxo de* X_h *e* I_p *o domínio da curva integral* $\sigma_t(p)$*. Em particular, se* $J(\xi)$ *é não constante, então é um integral primeiro do campo Hamiltoniano* $X_h \in \mathcal{X}(M)$*.*

1.2.3 Órbitas co-adjuntas

Vamos agora estudar alguns conceitos associados à ação co-adjunta, nomeadamente as suas órbitas e estrutura simplética que lhes está naturalmente associada. Comecemos por considerar $\alpha \in \mathcal{G}^*$, um elemento do dual da álgebra de Lie. O subgrupo de isotropia de α pela ação co-adjunta será então o conjunto

$$G_\alpha = \{g \in G : Ad*_g(\alpha) = \alpha\}$$

e a sua álgebra de isotropia será da forma

$$\mathcal{G}_\alpha = \left\{\xi \in \mathcal{G} : \dot{Ad}*(\xi)(\alpha) = \overrightarrow{0}\right\}.$$

Existe, contudo, uma expressão mais simples para $\mathcal{G}_\alpha$:

Lema 1.2.28. *A álgebra de istropia de* α *é dada, alternativamente, por*

$$\mathcal{G}_\alpha = \{\xi \in \mathcal{G} : \alpha \circ ad_\xi = 0\}.$$

Demonstração. Para provar que esta é uma forma alternativa de definir a álgebra de isotropia de α basta ver que, dado $\xi \in \mathcal{G}$, vale a equivalência

$$\dot{Ad}*(\xi)(\alpha) = \overrightarrow{0} \iff \alpha \circ ad_\xi = 0.$$

Usando a definição da ação co-adjunta, o lema 1.2.10 e a linearidade de α tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{Ad*}(\xi)(\alpha) = \overrightarrow{0} &\iff \left.\frac{d\left(\left\langle Ad*_{exp(-t\xi)}(\alpha), \eta\right\rangle\right)}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{G} \\
&\iff \left.\frac{d\left(\left\langle \alpha, Ad_{exp(t\xi)}(\eta)\right\rangle\right)}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{G} \\
&\iff \left\langle \alpha, \left.\frac{d(Ad_{exp(t\xi)}(\eta))}{dt}\right|_{t=0}\right\rangle = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{G} \\
&\iff \langle \alpha, ad_\xi(\eta)\rangle = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{G} \\
&\iff \alpha \circ ad_\xi = 0,
\end{aligned}$$

ficando assim provado o pretendido. □

Para facilitar a notação, designaremos a órbita de α pela ação co-adjunta por $\mathcal{O}$, ou seja,

$$\mathcal{O} = \{Ad*_g(\alpha) : g \in G\}.$$

Recordando a proposição 1.2.20 e considerando $\beta \in \mathcal{O}$, tem-se

$$T_\beta \mathcal{O} = \left\{\dot{Ad*}(\xi)(\beta) : \xi \in \mathcal{G}\right\}.$$

Definição 1.2.29. *Define-se em $\mathcal{O}$ a 2-forma $\omega^{\mathcal{O}}$ dada por*

$$\omega^{\mathcal{O}}_\beta\left(\dot{Ad*}(\xi)(\beta), \dot{Ad*}(\eta)(\beta)\right) = \langle \beta, [[\xi, \eta]]\rangle,$$

onde $\xi, \eta \in \mathcal{G}$ e $\beta \in \mathcal{O}$.

Facilmente se verifica que $\omega^{\mathcal{O}}$ é uma 2-forma diferencial. A diferenciabilidade resulta do facto de ser definida através da avaliação de uma função linear, a antissimetria resulta da mesma propriedade do parêntesis de Lie e a $\mathbb{R}$-bilinearidade segue da $\mathbb{R}$-bilinearidade do parêntesis de Lie e do facto de $\dot{Ad*}$ ser um homomorfismo de álgebras de Lie (pelo lema 1.2.12).

Lema 1.2.30. *$\omega^{\mathcal{O}}$ é invariante por $Ad*$, isto é,*

$$(Ad*_g)^*\omega^{\mathcal{O}} = \omega^{\mathcal{O}}, \quad \forall g \in G.$$

Demonstração. Sejam $\beta \in \mathcal{O}$, $\xi, \eta \in \mathcal{G}$ e $g \in G$ quaisquer. Recorrendo à definição A.0.5, ao lema 1.2.10, à definição 1.2.29 e ao lema 1.2.11, tem-se

$$\begin{aligned}
&((Ad*_g)^*\omega^{\mathcal{O}})_\beta\left(\dot{Ad*}(\xi)(\beta), \dot{Ad*}(\eta)(\beta)\right) = \\
&\quad = \omega^{\mathcal{O}}_{Ad*_g(\beta)}\left(\left(Ad*_g \cdot \dot{Ad*}(\xi)\right)(Ad*_g(\beta)), \left(Ad*_g \cdot \dot{Ad*}(\eta)\right)(Ad*_g(\beta))\right) \\
&\quad = \omega^{\mathcal{O}}_{Ad*_g(\beta)}\left(\dot{Ad*}(Ad_g(\xi))(Ad*_g(\beta)), \dot{Ad*}(Ad_g(\eta))(Ad*_g(\beta))\right) \\
&\quad = \langle Ad*_g(\beta), [[Ad_g(\xi), Ad_g(\eta)]]\rangle \\
&\quad = \langle Ad*_g(\beta), Ad_g([[\xi, \eta]])\rangle.
\end{aligned}$$

Recorrendo agora também à definição da ação co-adjunta dada em 1.2.9, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle Ad*_g(\beta), Ad_g([[\xi,\eta]])\rangle &= \left\langle \beta, Ad_{g^{-1}}(Ad_g([[\xi,\eta]]))\right\rangle \\
&= \langle \beta, [[\xi,\eta]]\rangle \\
&= \omega^{\mathcal{O}}_\beta\left(\dot{Ad*}(\xi)(\beta), \dot{Ad*}(\eta)(\beta)\right),
\end{aligned}$$

ficando assim concluída a prova. □

Lema 1.2.31. *Seja* $\lambda^{\mathcal{O}} : \mathcal{G} \longrightarrow C^\infty(\mathcal{O})$*, a aplicação dada por*

$$\lambda^{\mathcal{O}}(\xi)(\beta) = \langle \beta, \xi\rangle, \quad \forall \xi \in \mathcal{G}, \forall \beta \in \mathcal{O}.$$

Então,

$$i_{\dot{Ad*}(\xi)}\omega^{\mathcal{O}} = -d(\lambda^{\mathcal{O}}(\xi)).$$

Demonstração. Dados $\beta \in \mathcal{O}$ e $\xi, \eta \in \mathcal{G}$, por um lado tem-se

$$\left(i_{\dot{Ad*}(\xi)}\omega^{\mathcal{O}}\right)_\beta\left(\dot{Ad*}(\eta)(\beta)\right) = \omega^{\mathcal{O}}_\beta\left(\dot{Ad*}(\xi)(\beta), \dot{Ad*}(\eta)(\beta)\right) = \langle \beta, [[\xi,\eta]]\rangle,$$

por outro lado, recorrendo à definição da ação co-adjunta, à linearidade de β e ao lema 1.2.10, tem-se

$$\begin{aligned}
-d(\lambda^{\mathcal{O}}(\xi))_\beta\left(\dot{Ad*}(\eta)(\beta)\right) &= -d(\lambda^{\mathcal{O}}(\xi))_\beta\left(\left.\frac{d\left(Ad*_{exp(-t\eta)}(\beta)\right)}{dt}\right|_{t=0}\right) \\
&= -\left.\frac{d\left(\lambda^{\mathcal{O}}(\xi)\circ Ad*_{exp(-t\eta)}(\beta)\right)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= -\left.\frac{d\left(\left\langle Ad*_{exp(-t\eta)}(\beta), \xi\right\rangle\right)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= -\left.\frac{d\left(\left\langle \beta, Ad_{exp(t\eta)}(\xi)\right\rangle\right)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= -\left\langle \beta, \left.\frac{d\left(Ad_{exp(t\eta)}(\xi)\right)}{dt}\right|_{t=0}\right\rangle \\
&= -\langle \beta, ad_\eta(\xi)\rangle \\
&= \langle \beta, -[[\eta,\xi]]\rangle = \langle \beta, [[\xi,\eta]]\rangle.
\end{aligned}$$

□

Estão então reunidos todos os ingredientes necessários para provar o seguinte resultado:

Proposição 1.2.32. $(\mathcal{O}, \omega^{\mathcal{O}})$ *é uma variedade simplética.*

Demonstração. É necessário mostrar que $\omega^{\mathcal{O}}$ é não-degenerada e fechada. Comecemos por ver que é não-degenerada. Suponhamos que

$$i_{\dot{Ad*}(\xi)}\omega^{\mathcal{O}} = 0.$$

O objetivo é provar que $\dot{Ad*}(\xi) = 0$. Dado $\beta \in \mathcal{O}$, tem-se

$$\omega^{\mathcal{O}}_{\beta}\left(\dot{Ad*}(\xi)(\beta), \dot{Ad*}(\eta)(\beta)\right) = 0, \forall \eta \in \mathcal{G} \iff \langle \beta, [[\xi, \eta]] \rangle = 0, \forall \eta \in \mathcal{G}.$$

Mas como

$$\langle \beta, [[\xi, \eta]] \rangle = \beta \circ ad_{\xi}(\eta)$$

e

$$\beta \circ ad_{\xi}(\eta) = 0, \forall \eta \in \mathcal{G} \iff \beta \circ ad_{\xi} = 0,$$

recorrendo ao lema 1.2.28, tem-se

$$\langle \beta, [[\xi, \eta]] \rangle = 0, \forall \eta \in \mathcal{G} \iff \dot{Ad*}(\xi)(\beta) = \overrightarrow{0}.$$

Como $\beta \in \mathcal{O}$ era arbitrário, obtém-se o pretendido.

Falta agora ver que a 2-forma é fechada. Pelo lema 1.2.31 tem-se

$$d\left(i_{\dot{Ad*}(\xi)}\omega^{\mathcal{O}}\right) = 0.$$

Assim, usando a identidade de Cartan

$$\mathcal{L}_X\omega = d(i_X\omega) + i_X(d\omega)$$

obtém-se

$$\mathcal{L}_{\dot{Ad*}(\xi)}\omega^{\mathcal{O}} = i_{\dot{Ad*}(\xi)}\left(d\omega^{\mathcal{O}}\right).$$

Mas como

$$i_{\dot{Ad*}(\xi)}\left(d\omega^{\mathcal{O}}\right) = 0, \forall \xi \in \mathcal{G} \iff d\omega^{\mathcal{O}} = 0,$$

para provar que a 2-forma é fechada basta ver que, para todo $\xi \in \mathcal{G}$, se tem

$$\left(\mathcal{L}_{\dot{Ad*}(\xi)}\omega^{\mathcal{O}}\right)_{\beta}\left(\dot{Ad*}(\eta_1)(\beta), \dot{Ad*}(\eta_2)(\beta)\right) = 0, \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{G}, \forall \beta \in \mathcal{O}.$$

Tendo em conta que o fluxo do campo fundamental $\dot{Ad*}(\xi)$ é dado por $Ad*_{exp(-t\xi)}$ e que $\omega^{\mathcal{O}}$ é invariante por $Ad*$, tem-se, quaisquer que sejam $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{G}$ e $\beta \in \mathcal{O}$,

$$\begin{aligned}
&\left(\mathcal{L}_{\dot{Ad*}(\xi)}\omega^{\mathcal{O}}\right)_{\beta}\left(\dot{Ad*}(\eta_1)(\beta), \dot{Ad*}(\eta_2)(\beta)\right) = \\
&\qquad = \left.\frac{d\left(\left((Ad*_{exp(-t\xi)})^*\omega^{\mathcal{O}}\right)_{\beta}\left(\dot{Ad*}(\eta_1)(\beta), \dot{Ad*}(\eta_2)(\beta)\right)\right)}{dt}\right|_{t=0} \\
&\qquad = \left.\frac{d\left(\omega^{\mathcal{O}}_{\beta}\left(\dot{Ad*}(\eta_1)(\beta), \dot{Ad*}(\eta_2)(\beta)\right)\right)}{dt}\right|_{t=0} = 0,
\end{aligned}$$

pois a expressão não depende de t, pelo que fica provado o pretendido. $\square$

Teorema 1.2.33. *A ação*

$$Ad* : (G, .) \longrightarrow (Dif(\mathcal{O}), \circ)$$

é simplética e Hamiltoniana, com co-momento

$$J^{\mathcal{O}} = \lambda^{\mathcal{O}}.$$

O momento $\mu : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{G}^*$ *correspondente é a inclusão de* $\mathcal{O}$ *em* $\mathcal{G}^*$.

Demonstração. Como, pelo lema 1.2.32, $(\mathcal{O}, \omega^{\mathcal{O}})$ é uma variedade simplética e como, pelo lema 1.2.30, $\omega^{\mathcal{O}}$ é invariante por $Ad*$, então a ação $Ad*$ é simplética. Por outro lado, o lema 1.2.31 garante que $\lambda^{\mathcal{O}}$ é um co-momento da ação $Ad*$. Então, a ação é Hamiltoniana se

$$\lambda^{\mathcal{O}}([[\xi, \eta]]) = \left\{\lambda^{\mathcal{O}}(\xi), \lambda^{\mathcal{O}}(\eta)\right\}, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}. \tag{1.2}$$

Sejam $\beta \in \mathcal{O}$ e $\xi, \eta \in \mathcal{G}$ quaisquer. Então, por um lado, tem-se

$$\lambda^{\mathcal{O}}([[\xi, \eta]])(\beta) = \langle \beta, [[\xi, \eta]] \rangle = \omega^{\mathcal{O}}_{\beta} \left(\dot{Ad*}(\xi)(\beta), \dot{Ad*}(\eta)(\beta) \right),$$

por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned} \left\{\lambda^{\mathcal{O}}(\xi), \lambda^{\mathcal{O}}(\eta)\right\}(\beta) &= \omega^{\mathcal{O}}_{\beta} \left(X_{\lambda^{\mathcal{O}}(\xi)}(\beta), X_{\lambda^{\mathcal{O}}(\eta)}(\beta) \right) \\ &= \omega^{\mathcal{O}}_{\beta} \left(\dot{Ad*}(\xi)(\beta), \dot{Ad*}(\eta)(\beta) \right), \end{aligned}$$

de onde resulta a igualdade (1.2).

Falta ver que o momento correspondente é a inclusão. Seja

$$\mu : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{G}^*$$

tal momento. Então, para todo $\beta \in \mathcal{O}$ e $\xi \in \mathcal{G}$, tem-se

$$\langle \mu(\beta), \xi \rangle = \lambda^{\mathcal{O}}(\xi)(\beta) = \langle \beta, \xi \rangle,$$

de onde resulta que

$$\mu(\beta) = \beta, \quad \forall \beta \in \mathcal{O}.$$

□

1.2.4 Equivariância do momento de uma ação Hamiltoniana

Nesta sub-secção vamos trabalhar com duas ações distintas: a ação co-adjunta, definida em 1.2.9, e uma ação quase-Hamiltoniana de G em (M, ω)

$$\begin{aligned} \Psi : (G, .) &\longrightarrow (\mathrm{Simp}(M), \circ) \\ g &\longmapsto \Psi_g, \end{aligned}$$

com co-momento

$$J : \mathcal{G} \longrightarrow C^{\infty}(M).$$

Definição 1.2.34. *A aplicação momento da ação Ψ, $\mu : M \longrightarrow \mathcal{G}^*$, diz-se $Ad*$-equivariante se*

$$\mu \circ \Psi_g = Ad*_g \circ \mu, \quad \forall g \in G.$$

Lema 1.2.35. *Dado $\varphi \in Simp(M)$, valem as seguintes propriedades:*

1. *Qualquer que seja $f \in C^\infty(M)$, tem-se*

$$X_{\varphi \cdot f} = \varphi \cdot X_f;$$

2. *Quaisquer que sejam $f, h \in C^\infty(M)$, tem-se*

$$\{f, h\} \circ \varphi = \{f \circ \varphi, h \circ \varphi\}.$$

Demonstração. Seja (M, ω) uma variedade simplética. Recordando a definição A.0.5, seja $\varphi \in \mathrm{Simp}(M) \subseteq \mathrm{Dif}(M)$.

1. Primeiro vejamos que, dados $X \in \mathcal{X}(M)$ e $\varphi \in \mathrm{Dif}(M)$, se tem

$$\varphi^*(i_X \omega) = i_{\varphi^{-1} \cdot X}(\varphi^* \omega).$$

Como, dado $Y \in \mathcal{X}(M)$, por um lado se tem

$$\varphi^*(i_X \omega)(Y) = (i_X \omega)(\varphi \cdot Y) \circ \varphi = \omega(X, \varphi \cdot Y) \circ \varphi$$

e por outro se tem

$$i_{\varphi^{-1} \cdot X}(\varphi^* \omega)(Y) = (\varphi^* \omega)(\varphi^{-1} \cdot X, Y) = \omega(\varphi \cdot (\varphi^{-1} \cdot X), \varphi \cdot Y) \circ \varphi,$$

para provar a igualdade basta ver que

$$\varphi \cdot (\varphi^{-1} \cdot X) = X,$$

o que é imediato, usando derivações e o lema A.0.8, por exemplo.

Considere-se agora $f \in C^\infty(M)$. Então, tendo em conta a propriedade acima provada e o facto óbvio que φ^{-1} é um simplectomorfismo, tem-se

$$\begin{aligned} i_{X_{\varphi \cdot f}} \omega &= -d(\varphi \cdot f) \\ &= -d((\varphi^{-1})^* f) \\ &= -(\varphi^{-1})^*(df) \\ &= (\varphi^{-1})^*(i_{X_f} \omega) \\ &= i_{\varphi \cdot X_f}((\varphi^{-1})^* \omega) \\ &= i_{\varphi \cdot X_f} \omega. \end{aligned}$$

Como $\omega^\flat$ é um isomorfismo, fica provado o pretendido.

2. Sejam $p \in M$ e $f, g \in C^\infty(M)$ quaisquer. Então, tendo em conta a propriedade anteriormente provada e o facto de que

$$(d\varphi^{-1})_{\varphi(p)} = (d\varphi_p)^{-1},$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}(p) &= d(g \circ \varphi)_p(X_{f\circ\varphi}(p)) \\
&= dg_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p(X_{f\circ\varphi}(p)) \\
&= dg_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p(\varphi^{-1} \cdot X_f(p)) \\
&= dg_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p \circ (d\varphi^{-1})_{\varphi(p)}(X_f(\varphi(p))) \\
&= dg_{\varphi(p)}(X_f(\varphi(p))) \\
&= \{f, g\} \circ \varphi(p).
\end{aligned}$$

□

Vamos agora enunciar, e provar, alguns lemas auxilares que serão necessários na demonstração do teorema que os sucede.

Lema 1.2.36. *Se M for conexa e Ψ for Hamiltoniana com co-momento J então, quaisquer que sejam $g \in G$ e $\xi \in \mathcal{G}$, a função*

$$J(\xi) \circ \Psi_g - J(Ad_{g^{-1}}(\xi)) \in C^\infty(M)$$

é constante.

Demonstração. Recorrendo ao lema 1.2.35 (uma vez que Ψ_g é um simplectomorfismo) e ao lema 1.2.10, tem-se

$$\begin{aligned}
X_{J(\xi)\circ\Psi_g} &= X_{(\Psi_g)^{-1}\cdot J(\xi)} \\
&= \Psi_{g^{-1}} \cdot X_{J(\xi)} \\
&= \Psi_{g^{-1}} \cdot \dot{\Psi}(\xi) \\
&= \dot{\Psi}(Ad_{g^{-1}}(\xi)) \\
&= X_{J(Ad_{g^{-1}}(\xi))}.
\end{aligned}$$

Como M é conexa, por [9] (pág. 98, nota 4.9) tem-se

$$X_f = X_h \implies f - h \text{ constante},$$

de onde resulta que

$$J(\xi) \circ \Psi_g - J(Ad_{g^{-1}}(\xi)) = C(\xi, g)$$

é uma função constante de M em $\mathbb{R}$. □

Lema 1.2.37. *Nas condições e notação do lema 1.2.36, se $g = exp(-t\eta)$, com $\eta \in \mathcal{G}$, então*

$$J(\xi) \circ \Psi_g = J(Ad_{g^{-1}}(\xi)), \quad \forall \xi \in \mathcal{G}.$$

Demonstração. Fixemos $p \in M$. Dado $\xi \in \mathcal{G}$, considere-se a função

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto J(\xi) \circ \Psi_{exp(-t\eta)}(p) - J(Ad_{exp(t\eta)}(\xi))(p). \end{aligned}$$

Vamos ver que $\gamma(t) \equiv 0$, qualquer que seja $\xi \in \mathcal{G}$. Comecemos por notar que $\gamma(0) = 0$, uma vez que $exp(0) = e$ e que $\Psi_e = id_M$ e $Ad_e = id_{\mathcal{G}}$. Tendo em conta a $\mathbb{R}$-linearidade de J, tem-se

$$\begin{aligned} &\left.\frac{d\gamma(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \\ &= \left.\frac{d\left(J(\xi) \circ \Psi_{exp(-t\eta)}(p) - J(Ad_{exp(t\eta)}(\xi))(p)\right)}{dt}\right|_{t=t_0} \\ &= \left.\frac{d\left(J(\xi) \circ \Psi_{exp(-(s+t_0)\eta)}(p) - J(Ad_{exp((s+t_0)\eta)}(\xi))(p)\right)}{ds}\right|_{s=0} \\ &= \left.\frac{d\left(J(\xi) \circ \Psi_{exp(-s\eta)}(q)\right)}{ds}\right|_{s=0} - \left.\frac{d\left(J(Ad_{exp((s+t_0)\eta)}(\xi))(p)\right)}{ds}\right|_{s=0} \\ &= (dJ(\xi))_q \left(\left.\frac{d\left(\Psi_{exp(-s\eta)}(q)\right)}{ds}\right|_{s=0} \right) - J\left(\left.\frac{d\left(Ad_{exp((s+t_0)\eta)}(\xi)\right)}{ds}\right|_{s=0} \right)(p), \end{aligned}$$

onde $q = \Psi_{exp(-t_0\eta)}(p)$. Pegando agora na primeira parcela e usando os lemas 1.2.35 e 1.2.36, tem-se

$$\begin{aligned} &(dJ(\xi))_q \left(\left.\frac{d\left(\Psi_{exp(-s\eta)}(q)\right)}{ds}\right|_{s=0} \right) = \\ &= (dJ(\xi))_q \left(\dot{\Psi}(\eta)(q)\right) \\ &= (dJ(\xi))_q \left(X_{J(\eta)}(q)\right) \\ &= \{J(\eta), J(\xi)\}(q) \\ &= \left\{J(\eta) \circ \Psi_{exp(-t_0\eta)}, J(\xi) \circ \Psi_{exp(-t_0\eta)}\right\}(p) \\ &= \left\{J\left(Ad_{exp(t_0\eta)}(\eta)\right) + C_1, J\left(Ad_{exp(t_0\eta)}(\xi)\right) + C_2\right\}(p) \\ &= \left\{J\left(Ad_{exp(t_0\eta)}(\eta)\right), J\left(Ad_{exp(t_0\eta)}(\xi)\right)\right\}(p), \end{aligned}$$

onde

$$C_1 := C_1(\eta, exp(-t_0\eta)) \text{ e } C_2 := C_2(\xi, exp(-t_0\eta))$$

representam funções constantes em M. De notar que a última igualdade vale pelo facto de se ter

$$\{f+c,h\}=\{f,h\},\quad \forall c\in\mathbb{R}.$$

Pegando de seguida na segunda parcela e usando o lema 1.2.10 e a hipótese de que Ψ é Hamiltoniana, tem-se

$$\begin{aligned}
J\left(\left.\frac{d\left(Ad_{exp((s+t_0)\eta)}(\xi)\right)}{ds}\right|_{s=0}\right)(p) &= J\left(\left.\frac{d\left(Ad_{exp(s\eta)}(Ad_{exp(t_0\eta)}(\xi))\right)}{ds}\right|_{s=0}\right)(p)\\
&= J\left(ad_\eta\left(Ad_{exp(t_0\eta)}(\xi)\right)\right)(p)\\
&= J\left([[\eta, Ad_{exp(t_0\eta)}(\xi)]]\right)(p)\\
&= J\left([[Ad_{exp(t_0\eta)}(\eta), Ad_{exp(t_0\eta)}(\xi)]]\right)(p)\\
&= \left\{J\left(Ad_{exp(t_0\eta)}(\eta)\right), J\left(Ad_{exp(t_0\eta)}(\xi)\right)\right\}(p).
\end{aligned}$$

Assim se conclui que $\gamma(t)\equiv 0$, uma vez que a sua derivada se anula em todos os pontos, o que implica γ constante. □

Lema 1.2.38. *Se $g,h\in G$ e $\xi\in\mathcal{G}$ são tais que*

$$\begin{aligned}
J(\xi)\circ\Psi_g &= J\left(Ad_{g^{-1}}(\xi)\right)\\
J(\xi)\circ\Psi_h &= J\left(Ad_{h^{-1}}(\xi)\right),
\end{aligned}\tag{1.3}$$

então

$$J(\xi)\circ\Psi_{g.h}=J\left(Ad_{(g.h)^{-1}}(\xi)\right).$$

Demonstração. Sejam $g,h\in G$ e $\xi\in\mathcal{G}$ satisfazendo (1.3). Então

$$\begin{aligned}
J(\xi)\circ\Psi_{g.h} &= J(\xi)\circ\Psi_g\circ\Psi_h\\
&= J\left(Ad_{g^{-1}}(\xi)\right)\circ\Psi_h\\
&= J\left(Ad_{h^{-1}}\left(Ad_{g^{-1}}(\xi)\right)\right)\\
&= J\left(Ad_{h^{-1}.g^{-1}}(\xi)\right)\\
&= J\left(Ad_{(g.h)^{-1}}(\xi)\right).
\end{aligned}$$

□

Estão agora reunidas as condições para provar o seguinte teorema:

Teorema 1.2.39. *Considere-se (M,ω) uma variedade simplética conexa. São condições equivalentes:*

1. *Ψ é Hamiltoniana;*

2. *$\mu : M\longrightarrow\mathcal{G}^*$ é $Ad*$-equivariante.*

Demonstração. Comecemos por provar que *2* implica *1*. Assumindo a hipótese

$$\mu \circ \Psi_g = Ad*_g \circ \mu, \quad \forall g \in G,$$

queremos provar que Ψ é Hamiltoniana, isto é, que dados $\xi, \eta \in \mathcal{G}$ e $p \in M$ arbitrários, se tem

$$J([[\xi, \eta]])(p) = \{J(\xi), J(\eta)\}(p).$$

Usando a $Ad*$-equivariância de μ, a $\mathbb{R}$-linearidade de $\mu(p)$ e o lema 1.2.10, tem-se

$$\begin{aligned}
\{J(\xi), J(\eta)\}(p) &= (dJ(\eta))_p \left(X_{J(\xi)}(p)\right) \\
&= (dJ(\eta))_p \left(\dot{\Psi}(\xi)(p)\right) \\
&= (dJ(\eta))_p \left(\left. \frac{d\left(\Psi_{exp(-t\xi)}(p)\right)}{dt} \right|_{t=0} \right) \\
&= \left. \frac{d\left(J(\eta) \circ \Psi_{exp(-t\xi)}(p)\right)}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d\left(\left\langle \mu \circ \Psi_{exp(-t\xi)}(p), \eta \right\rangle\right)}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d\left(\left\langle Ad*_{exp(-t\xi)} \circ \mu(p), \eta \right\rangle\right)}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d\left(\left\langle \mu(p), Ad_{exp(t\xi)}(\eta) \right\rangle\right)}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \left\langle \mu(p), \left. \frac{d\left(Ad_{exp(t\xi)}(\eta)\right)}{dt} \right|_{t=0} \right\rangle \\
&= \langle \mu(p), ad_\xi(\eta) \rangle \\
&= \langle \mu(p), [[\xi, \eta]] \rangle \\
&= J([[\xi, \eta]])(p).
\end{aligned}$$

Falta agora ver que *1* implica *2*. Para tal, comecemos por traduzir, em termos de J, o significado da $Ad*$-equivariância do momento. Notando que, dados $g \in G$ e $p \in M$, se tem

$$Ad*_g \circ \mu(p) \in \mathcal{G}^*,$$

então

$$\begin{aligned}
Ad*_g \circ \mu(p) = \mu \circ \Psi_g(p) &\iff \langle Ad*_g \circ \mu(p), \xi \rangle = \langle \mu \circ \Psi_g(p), \xi \rangle, \forall \xi \in \mathcal{G} \\
&\iff \left\langle \mu(p), Ad_{g^{-1}}(\xi) \right\rangle = J(\xi)(\Psi_g(p)), \forall \xi \in \mathcal{G} \\
&\iff J(Ad_{g^{-1}}(\xi))(p) = (J(\xi) \circ \Psi_g)(p), \forall \xi \in \mathcal{G}.
\end{aligned}$$

Assim, assumindo Ψ Hamiltoniana, queremos ver que

$$J\left(Ad_{g^{-1}}(\xi)\right) = J(\xi) \circ \Psi_g, \quad \forall \xi \in \mathcal{G}, \forall g \in G.$$

Para provar esta igualdade vai ser necessária a seguinte afirmação:

$$G \text{ conexo} \implies G \text{ é gerado por exponenciais},$$

cuja prova vai ser remetida para [9] (apêndice 5, pág. 419, proposição 2.10). Usando este resultado, fixado $g \in G$, existem $\eta_1, ..., \eta_n \in \mathcal{G}$ tais que

$$g = exp(\eta_1). \; ... \; .exp(\eta_n).$$

Assim, dado $\xi \in \mathcal{G}$, tem-se

$$J\left(Ad_{g^{-1}}(\xi)\right) = J\left(Ad_{(exp(\eta_n))^{-1}. \; ... \; .(exp(\eta_1))^{-1}}(\xi)\right).$$

Pelo lema 1.2.37, tomando $t = -1$, tem-se

$$J\left(Ad_{(exp(\eta_i))^{-1}}(\xi)\right) = J(\xi) \circ \Psi_{exp(\eta_i)}, \quad \forall i \in \{1, ..., n\},$$

pelo que, aplicando o lema 1.2.38, obtemos

$$J\left(Ad_{g^{-1}}(\xi)\right) = J(\xi) \circ \Psi_{exp(\eta_1). \; ... \; .exp(\eta_n)} = J(\xi) \circ \Psi_g$$

como pretendido. □

Nota 1.2.40. *A primeira implicação provada na demonstração do teorema 1.2.39 está amplamente divulgada e pode ser encontrada, por exemplo, em [1] (pág. 281, corolário 4.2.9). A implicação recíproca não se encontra nos principais livros da área.*

1.3 Teorema da Redução de Marsden & Weinstein

Estão agora reunidos todos os conceitos e resultados necessários a uma correta formulação e interpretação do Teorema da Redução de Marsden & Weinstein.

Comecemos por listar as hipóteses que vão ser consideradas na formulação do teorema:

1. (M, ω): variedade simplética conexa;
2. $(G, .)$: grupo de Lie conexo, com $\dim(G) < \dim(M)$;
3. Ψ: ação Hamiltoniana de G em M;
4. $J : \mathcal{G} \longrightarrow C^\infty(M)$: aplicação co-momento de Ψ;

5. $\mu : M \longrightarrow \mathcal{G}^*$: aplicação momento de Ψ ($Ad*$-equivariante, pelo teorema 1.2.39);

6. $x \in \mathcal{G}^*$: valor regular de μ [1];

7. $N = \mu^{-1}(x) \neq \emptyset$: subvariedade mergulhada de M;

8. $G_x = \{g \in G : Ad*_g(x) = x\}$: subgrupo de isotropia de x pela ação $Ad*$, com ação (restrição de Ψ a G_x) livre e própria sobre N. Assim, N/G_x tem estrutura de variedade diferenciável para a qual π é uma submersão sobrejetiva.

Denotaremos por $\mathcal{O}_p^x$ a órbita de $p \in N$ pelo subgrupo de Lie G_x, ou seja,

$$\mathcal{O}_p^x = \{\Psi_g(p) : g \in G_x\} \subseteq \mathcal{O}_p.$$

Nota 1.3.1. *O termo "restrição de Ψ a G_x"é um abuso de linguagem que, na realidade, significa Ψ restrita a $G_x \times M$, ou seja, está-se a considerar Ψ_g calculada em pontos de M com $g \in G_x$. Além disso, G_x atua sobre N pela ação restrita, isto é,*

$$p \in N, g \in G_x \implies \Psi_g(p) \in N,$$

pois, como μ é $Ad*$-equivariante, quando $p \in N = \mu^{-1}(x)$ e $g \in G_x$ se tem

$$\mu(\Psi_g(p)) = Ad*_g(\mu(p)) = Ad*_g(x) = x.$$

Na realidade, a implicação acima é uma equivalência, mas tal facto só se tornará relevante no capítulo seguinte.

Antes de enunciarmos o Teorema da Redução de Marsden & Weinstein vamos apresentar, e demonstrar, um lema que será necessário na sua prova. Esse lema, bem como a sua demonstração, estão presentes em [13] (pág. 123, primeiro lema) e em [1] (capítulo 4, pág. 299, lema 4.3.2), embora sem tanto detalhe como a que aqui vamos fazer.

Lema 1.3.2. *Nas condições 1 a 8 acima descritas, tem-se*

1. $T_p\mathcal{O}_p^x = T_p\mathcal{O}_p \cap T_pN$;

2. $T_pN = (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p}$, *onde* $(T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p}$ *representa o complemento simplético de* $T_p\mathcal{O}_p$. *Ou seja, dados* $u, v \in T_pM$, *tem lugar a equivalência*

$$\omega_p(u, v) = 0, \forall u \in T_p\mathcal{O}_p \iff v \in T_pN.$$

[1] O Teorema de Sard ([7], pág. 129, teorema 6.10) garante que "quase todos"os elementos de $\mathcal{G}^*$ são valores regulares de μ.

Demonstração. Primeiramente, é necessário caracterizar o espaço tangente a N num ponto p. Uma vez que $N = \mu^{-1}(x)$, tem-se

$$T_pN = \left\{ u \in T_pM : d\mu_p(u) = \overrightarrow{0} \right\}.$$

1. Seja $u \in T_p\mathcal{O}_p$. Então, lembrando a proposição 1.2.20, $u = \dot{\Psi}(\xi)(p)$ para algum $\xi \in \mathcal{G}$. Para mostrarmos a igualdade pretendida basta então provar a equivalência

$$d\mu_p(u) = \overrightarrow{0} \iff u \in T_p\mathcal{O}_p^x,$$

uma vez que $T_p\mathcal{O}_p^x \subseteq T_p\mathcal{O}_p$. De facto tem-se

$$\begin{aligned} d\mu_p(\dot{\Psi}(\xi)(p)) = \overrightarrow{0} &\iff d\mu_p\left(\left.\frac{d\left(\Psi_{exp(-t\xi)}(p)\right)}{dt}\right|_{t=0} \right) = \overrightarrow{0} \\ &\iff \left.\frac{d\left(\mu \circ \Psi_{exp(-t\xi)}(p)\right)}{dt}\right|_{t=0} = \overrightarrow{0} \\ &\iff \left.\frac{d\left(Ad*_{exp(-t\xi)} \circ \mu(p)\right)}{dt}\right|_{t=0} = \overrightarrow{0} \\ &\iff \left.\frac{d\left(Ad*_{exp(-t\xi)}(x)\right)}{dt}\right|_{t=0} = \overrightarrow{0} \\ &\iff \dot{Ad}*(\xi)(x) = \overrightarrow{0} \\ &\iff \xi \in \mathcal{G}_x \\ &\iff \dot{\Psi}(\xi)(p) \in T_p\mathcal{O}_p^x, \end{aligned}$$

ficando assim provado o primeiro ponto do lema.

2. Seja $v \in T_pM$. Então

$$\omega_p(u,v) = 0, \forall u \in T_p\mathcal{O}_p \iff \omega_p\left(\dot{\Psi}(\xi)(p), v\right) = 0, \forall \xi \in \mathcal{G}$$

ou, equivalentemente,

$$\left(dJ(\xi)\right)_p(v) = 0, \forall \xi \in \mathcal{G}.$$

Como $v \in T_pM$, existe uma curva (suave) $\gamma : \,]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow M$ com $\gamma(0) = p$ tal que

$$v = \left.\frac{d\gamma(t)}{dt}\right|_{t=0}.$$

Assim, para todo $\xi \in \mathcal{G}$, tem-se

$$\begin{aligned}
(dJ(\xi))_p \left(\left. \frac{d\gamma(t)}{dt} \right|_{t=0} \right) = 0 &\iff \left. \frac{d\left(J(\xi)(\gamma(t))\right)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \\
&\iff \left. \frac{d\left(\langle \mu(\gamma(t)), \xi \rangle\right)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \\
&\iff \left\langle d\mu_p \left(\left. \frac{d\gamma(t)}{dt} \right|_{t=0} \right), \xi \right\rangle = 0 \\
&\iff \langle d\mu_p(v), \xi \rangle = 0,
\end{aligned}$$

de onde resulta que

$$v \in Ker(d\mu_p) = T_pN.$$

$\square$

O Teorema da Redução de Marsden & Weinstein pode ser encontrado em [13] (pág. 123) e em [1] (capítulo 4, pág. 299, teorema 4.3.1), bem como a respetiva prova. Tal como no lema 1.3.2, a demonstração que aqui vamos apresentar contém todos os detalhes omissos na prova presente em [13] e [1], que achamos necessário serem mencionados para um melhor entendimento da mesma.

De salientar que a condição referente à $Ad*$-equivariância de μ é imposta em [13] e [1] em substituição da condição de Ψ ser Hamiltoniana, mas o teorema 1.2.39 garante-nos que estas condições são equivalentes, caso G seja conexo. Assim, o seguinte teorema, apesar de não ter a mesma formulação que em [13] e [1], é equivalente ao original, nas hipóteses 1 a 8 acima apresentadas.

Teorema 1.3.3 (Teorema da Redução de Marsden & Weinstein)**.** *Nas condições 1 a 8 acima descritas, sejam*

- $M_x = N/G_x$;
- $\pi : N \longrightarrow M_x$ *a projeção canónica;*
- $i : N \hookrightarrow M$ *a inclusão.*

Então, existe uma única forma simplética ω^x em M_x para a qual

$$\pi^*\omega^x = i^*\omega. \tag{1.4}$$

À variedade simplética (M_x, ω^x) dá-se o nome de variedade simplética reduzida.

Demonstração. Considere-se a seguinte 2-forma diferencial em M_x dada por

$$\omega^x_{[p]}([u],[v]) = \omega_p(u,v), \tag{1.5}$$

onde $p \in N$, $[p] = \mathcal{O}^x_p$, $u, v \in T_pN$ e $[u],[v] \in T_{[p]}M_x$. Usando a correspondência do espaço tangente a M_x dada no lema 1.2.22, tem-se

$$[u] = \left\{ u + T_p\mathcal{O}^x_p \right\}.$$

Mas, por outro lado, como $d\pi_p$ é sobrejetiva qualquer que seja $p \in N$, tem-se também

$$[u] = d\pi_p(u).$$

Facilmente se observa que a 2-forma definida em (1.5) é a única que obedece a (1.4) e que é, de facto, diferenciável, uma vez que é definida à custa de ω e do pullback por aplicações suaves. Vamos ver que esta 2-forma está bem-definida. Para tal, é necessário verificar duas condições:

- ω^x não depende da escolha dos representantes de $[u]$ e $[v]$:

  Considerem-se $u_1, u_2, v_1, v_2 \in T_pN$ tais que

  $$[u_1] = [u_2] \ , \ [v_1] = [v_2].$$

  Então, existem $w_u, w_v \in T_p\mathcal{O}^x_p$ tais que

  $$u_2 - u_1 = w_u \text{ e } v_2 - v_1 = w_v.$$

  Tem-se então que

  $$\begin{aligned} \omega^x_{[p]}([u_2],[v_2]) &= \omega_p(u_2, v_2) \\ &= \omega_p(u_1 + w_u, v_1 + w_v) \\ &= \omega_p(u_1, v_1) + \omega_p(u_1, w_v) + \omega_p(w_u, v_1) + \omega_p(w_u, w_v) \\ &= \omega_p(u_1, v_1) \\ &= \omega^x_{[p]}([u_1],[v_1]) \end{aligned}$$

  pois, pelo lema 1.3.2, e uma vez que

  $$T_p\mathcal{O}^x_p = T_p\mathcal{O}_p \cap T_pN = (T_pN)^{\omega_p} \cap T_pN,$$

  se tem

  $$\omega_p(u_1, w_v) = \omega_p(w_u, v_1) = \omega_p(w_u, w_v) = 0.$$

- ω^x não depende da escolha do representante de $[p]$:

  Considerem-se $p, q \in N$ tais que

  $$[p] = [q].$$

Então, existe $g \in G_x$ tal que

$$q = \Psi_g(p) \in \mathcal{O}_p^x.$$

Uma vez que, para todo $g \in G_x$, $\Psi_g : M \longrightarrow M$ é um difeomorfismo (por se tratar de uma ação), conclui-se que

$$\left(d\Psi_g\right)_p : T_pN \longrightarrow T_qN$$

é um isomorfismo (logo, em particular, é sobrejetiva). Assim, dados $[u_2], [v_2] \in T_qN/T_q\mathcal{O}_q^x$, existem $u_1, v_1 \in T_pN$ tais que

$$u_2 = \left(d\Psi_g\right)_p(u_1) \text{ e } v_2 = \left(d\Psi_g\right)_p(v_1),$$

logo

$$\begin{aligned}
\omega^x_{[q]}([u_2],[v_2]) &= \omega_q(u_2, v_2) \\
&= \omega_{\Psi_g(p)}(\left(d\Psi_g\right)_p(u_1), \left(d\Psi_g\right)_p(v_1)) \\
&= \left(\Psi_g^*\omega\right)_p(u_1, v_1) \\
&= \omega_p(u_1, v_1) \\
&= \omega^x_{[p]}([u_1],[v_1])
\end{aligned}$$

pois Ψ é simplética.

Falta agora provar que ω^x é simplética. Para tal, é necessário verificar duas condições:

- ω^x é fechada:

  Como, por definição, $\pi^*\omega^x = i^*\omega$, e uma vez que o pullback comuta com a diferencial exterior, tem-se

  $$d(\pi^*\omega^x) = d(i^*\omega) \iff \pi^*(d\omega^x) = i^*(d\omega).$$

  Mas $i^*(d\omega) = 0$, uma vez que $d\omega = 0$. Sejam $p \in N$ e $u, v, w \in T_pN$ quaisquer. Então,

  $$\pi^*(d\omega^x)_p(u, v, w) = 0 \iff (d\omega^x)_{\pi(p)}(d\pi_p(u), d\pi_p(v), d\pi_p(w)) = 0.$$

  Mas como π é sobrejetiva, tem-se

  $$\pi(N) = M_x,$$

  e como, para todo $p \in N$, $d\pi_p$ é sobrejetiva, tem-se

  $$d\pi_p(T_pN) = T_{[p]}M_x,$$

  de onde resulta que

  $$d\omega^x = 0.$$

- ω^x é não-degenerada:

  De facto,

$$\begin{aligned}\omega^x_{[p]}([u],[v]) = 0, \forall [v] \in T_{[p]}M_x &\iff \omega_p(u,v) = 0, \forall v \in T_pN \\ &\iff u \in (T_pN)^{\omega_p} = T_p\mathcal{O}_p.\end{aligned}$$

  Mas então $u \in T_pN \cap T_p\mathcal{O}_p = T_p\mathcal{O}^x_p$, pelo que se tem

$$[u] = \left\{u + T_p\mathcal{O}^x_p\right\} = \left\{0 + T_p\mathcal{O}^x_p\right\} = [0].$$

□

Lema 1.3.4. *Nas condições do teorema 1.3.3, tem-se*

$$dim(M_x) = dim(M) - 2dim(G) + dim(\mathcal{O}_x),$$

onde

$$\mathcal{O}_x = \{Ad*_g(x) : g \in G\} \subseteq \mathcal{G}^*$$

é a órbita co-adjunta de x.

Demonstração. Uma vez que $N = \mu^{-1}(x)$, com x um valor regular de μ, tem-se

$$\dim(N) = \dim(M) - \dim(\mathcal{G}^*) = \dim(M) - \dim(G). \tag{1.6}$$

Além disso, como a ação de G_x sobre N é livre, o subgrupo de isotropia de $p \in N$ pela ação Ψ restrita a G_x é trivial, logo

$$\dim((G_x)_p) = 0, \quad \forall p \in N. \tag{1.7}$$

Então, recorrendo aos lemas 1.2.22 e 1.2.21 e às condições (1.6) e (1.7), tem-se

$$\begin{aligned}\dim(M_x) &= \dim(N/G_x) \\ &= \dim(T_{\mathcal{O}^x_p}(N/G_x)) \\ &= \dim(T_pN) - \dim(T_p\mathcal{O}^x_p) \\ &= \dim(N) - \dim(\mathcal{O}^x_p) \\ &= \dim(M) - \dim(G) - \dim(\mathcal{O}^x_p) \\ &= \dim(M) - \dim(G) - (\dim(G_x) - \dim((G_x)_p)) \\ &= \dim(M) - \dim(G) - \dim(G_x) \\ &= \dim(M) - \dim(G) - (\dim(G) - \dim(\mathcal{O}_x)) \\ &= \dim(M) - 2\dim(G) + \dim(\mathcal{O}_x).\end{aligned}$$

□

De notar que, pela proposição 1.2.32, $\mathcal{O}_x$ tem estrutura de variedade simplética, logo $\mathcal{O}_x$ tem dimensão par. Como a dimensão de M também é par, M_x terá, como seria esperado, dimensão par.

Além disso, como

$$\dim(\mathcal{O}_x) \leqslant \dim(\mathcal{G}^*) = \dim(\mathcal{G}) = \dim(G),$$

pode concluir-se que

$$\dim(M_x) \leqslant \dim(M) - \dim(G) \leqslant \dim(M),$$

isto é, estamos sempre perante um espaço quociente de dimensão inferior à de M, desde que $\dim(G) \neq 0$.

1.4 Exemplo

Considere-se a variedade simplética canónica $(\mathbb{R}^4, \omega)$, ou seja

$$\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) : x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}\},$$

onde (x_1, x_2, y_1, y_2) são coordenadas simpléticas, isto é,

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2.$$

Considere-se também o grupo de Lie $G = SO(2)$ caracterizado por

$$SO(2) = \left\{ A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi[\right\},$$

com operação

$$A_\theta . A_{\theta'} = A_{\theta+\theta' \bmod 2\pi}$$

e elemento neutro

$$e = A_0 = Id.$$

G é abeliano, compacto ($G \cong S^1$) e dim(G)=1. A sua álgebra de Lie é dada por $\mathcal{G} = so(2)$, onde

$$so(2) = \left\{ \xi \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \xi^T = -\xi \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como G é abeliano, a ação adjunta é a identidade em $so(2)$, ou seja,

$$Ad_{A_\theta} = id_{\mathcal{G}}, \quad \forall A_\theta \in G,$$

o que por sua vez leva a que a ação co-adjunta seja a identidade em $so(2)^*$, isto é,

$$Ad{*}_{A_\theta} = id_{\mathcal{G}^*}, \quad \forall A_\theta \in G.$$

Uma vez que G tem dimensão 1, o parêntesis de Lie em $\mathcal{G}$ é nulo, ou seja,

$$[[\xi, \eta]] = 0, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}.$$

A aplicação exponencial em G é dada pela matriz exponencial, ou seja, se

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

tem-se

$$exp(-t\xi) = e^{-t\xi} = \begin{pmatrix} \cos(tb) & -\sin(tb) \\ \sin(tb) & \cos(tb) \end{pmatrix} = A_{tb}.$$

Considere-se agora a ação por rotações de $SO(2)$ em $(\mathbb{R}^4, \omega)$ dada por

$$\begin{aligned} \Psi_{A_\theta} : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ p &\longmapsto \left(A_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A_\theta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

onde $p = (x_1, x_2, y_1, y_2)$. Dado

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

o seu campo fundamental, $\dot{\Psi}(\xi)$, é dado por

$$\dot{\Psi}(\xi)(p) = -bx_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + bx_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - by_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + by_1 \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

É fácil verificar que Ψ_{A_θ} é simplética e Hamiltoniana, com co-momento

$$\begin{aligned} J : \mathcal{G} &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^4) \\ \xi &\longmapsto J(\xi) \end{aligned}$$

dado por

$$\begin{aligned} J(\xi) : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto b(x_2 y_1 - x_1 y_2). \end{aligned}$$

Usando a identificação $\mathcal{G}^* \cong \mathbb{R}$ através de

$$x \longmapsto \alpha_x,$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_x : so(2) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto xb, \end{aligned}$$

podemos definir a aplicação momento por

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto x_2 y_1 - x_1 y_2. \end{aligned}$$

Vamos agora calcular o conjunto dos valores regulares de μ. Notando que

$$d\mu_p = -y_2 dx_1 + y_1 dx_2 + x_2 dy_1 - x_1 dy_2,$$

$x \in \mathbb{R} \cong so(2)^*$ é valor regular de μ se

- $\mu^{-1}(x) \neq \emptyset$;
- μ tem característica máxima em todos os pontos de $\mu^{-1}(x)$.

Observando a expressão de $d\mu_p$ facilmente se conclui que μ terá característica máxima (isto é, característica 1) se e só se $p \neq (0,0,0,0)$. Assim, x será valor regular de μ se e só se

- $\mu^{-1}(x) \neq \emptyset$;
- $(0,0,0,0) \notin \mu^{-1}(x)$.

Uma vez que $\mu(0,0,0,0) = 0$, tem-se $(0,0,0,0) \notin \mu^{-1}(x)$ se e só se $x \neq 0$. Então, todos os valores em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ são candidatos a valor regular. Mas como $\mu(0,x,1,0) = x$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, tem-se $\mu^{-1}(x) \neq \emptyset$, logo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é o conjunto dos valores regulares de μ.

Considere-se agora $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como a ação co-adjunta é a identidade em $\mathcal{G}^*$, o subgrupo de isotropia de x coincide com G, isto é,

$$G_x = \{A_\theta \in SO(2) : Ad*_{A_\theta}(x) = x\} = SO(2),$$

e a sua álgebra de isotropia é igual a $\mathcal{G}$, ou seja,

$$\mathcal{G}_x = so(2).$$

Seja N a subvariedade mergulhada de M definida por

$$N = \mu^{-1}(x).$$

Numa tentativa de contextualizar geometricamente tal variedade, podemos notar que a interseção de N com o hiper-plano $x_1 = 0$ ($y_1 = 0$, respetivamente) será uma hipérbole, para cada y_2 (x_2, respetivamente) fixado, ou seja, será dada pela união de duas folhas hiperbólicas. A mesma descrição tem lugar trocando os índices.

Como G_x é compacto, a ação Ψ restrita a G_x é própria. Considere-se agora o subgrupo de isotropia de $p \in N$ pela ação Ψ restrita a G_x, ou seja,

$$(G_x)_p = \{A_\theta \in G_x : \Psi_{A_\theta}(p) = p\}.$$

Com alguns cálculos consegue-se facilmente ver que

$$\Psi_{A_\theta}(p) = p \iff A_\theta = e,$$

pelo que se conclui que a ação restrita a G_x é livre.

Estamos então nas condições do teorema 1.3.3. A variedade simplética reduzida será

$$M_x = N/G_x = \{\mathcal{O}_p^x : p \in N\},$$

com
$$\dim(M_x) = \dim(\mathbb{R}^4) - 2\dim(G) + \dim(\mathcal{O}_x) = 2$$
uma vez que
$$\mathcal{O}_x = \{Ad*_{A_\theta}(x) : A_\theta \in SO(2)\} = \{x\}.$$
Como $G_x = SO(2) = G$, tem-se $\mathcal{O}_p^x = \mathcal{O}_p$. Uma vez que estamos perante uma ação por rotações, conclui-se automaticamente que cada órbita $\mathcal{O}_p^x$ estará contida na hiper-superfície esférica centrada na origem e que contém p. No entanto, notando que esta é uma ação por rotações de $SO(2)$ nas primeiras duas e nas últimas duas coordenadas, na realidade cada órbita estará contida num toro bidimensional $T^2 \cong S^1 \times S^1$ que contém p. Além disso, uma vez que
$$\dim(\mathcal{O}_p^x) = \dim(N) - \dim(M_x) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(G) - \dim(M_x) = 1,$$
a órbita $\mathcal{O}_p^x$ será uma curva contida nesse toro.

1.5 Teorema da Redução da Dinâmica de Marsden & Weinstein

Nesta secção vamos estudar o teorema da redução da dinâmica inicialmente formulado por Marsden e Weinstein em [13], que vem complementar o trabalho visto anteriormente. Denominaremos tal resultado por Teorema da Redução da Dinâmica de Marsden & Weinstein. Depois de reunidas as condições do Teorema da Redução de Marsden & Weinstein para garantirmos a existência de uma estrutura simplética no espaço reduzido M_x, é natural tentar perceber que hipóteses são necessárias para que o estudo da dinâmica de um campo Hamiltoniano de M possa ser feito em M_x, onde o P.V.I. associado será, em teoria, de mais fácil resolução, tornando possível a recuperação da dinâmica original.

De salientar que, originalmente, este teorema foi formulado para ações e não para fluxos de campos de vetores, saíndo como corolário o teorema que aqui vamos apresentar, como pode ser visto em [13] (pág. 217). Posteriormente, em [1] (pág. 304, teorema 4.3.5), Abraham e Marsden reformulam o resultado de uma forma mais próxima à aqui apresentada.

Lema 1.5.1. *Nas condições do Teorema da Redução de Marsden & Weinstein, seja $H \in C^\infty(M)$ uma função G-invariante e considere-se o campo Hamiltoniano $X_H \in \mathcal{X}(M)$. Então, o fluxo de X_H deixa N invariante e comuta com Ψ.*

Demonstração. Seja σ_t o fluxo de X_H. Dado $p \in M$ arbitrário, recorrendo ao teorema 1.2.27 tem-se
$$\langle \mu(p), \xi \rangle = J(\xi)(p) = J(\xi) \circ \sigma_t(p) = \langle \mu \circ \sigma_t(p), \xi \rangle, \quad \forall \xi \in \mathcal{G}, \forall t \in I_p,$$

onde I_p é o domínio da curva integral $\sigma_t(p)$. Como a igualdade acima é válida para todo $\xi \in \mathcal{G}$ conclui-se que

$$\mu(p) = \mu \circ \sigma_t(p), \quad \forall p \in M, \forall t \in I_p.$$

Assim, tendo em conta que $N = \mu^{-1}(x)$, o fluxo σ_t deixa N invariante uma vez que, dado $p \in N$ qualquer, se tem

$$\mu \circ \sigma_t(p) = \mu(p) = x, \quad \forall t \in I_p,$$

ou seja,

$$\sigma_t(p) \in N, \quad \forall t \in I_p.$$

Falta provar que σ_t comuta com Ψ, isto é,

$$\Psi_g \circ \sigma_t(p) = \sigma_t \circ \Psi_g(p), \quad \forall p \in M, \forall g \in G, \forall t \in I_p.$$

Seja $f \in C^\infty(M)$. Então, recorrendo aos lemas A.0.8 e 1.2.35 e à G-invariância de H, tem-se

$$\begin{aligned}
(\Psi_g \cdot X_H)(f) &= X_H(f \circ \Psi_g) \circ \Psi_{g^{-1}} \\
&= \{H, f \circ \Psi_g\} \circ \Psi_{g^{-1}} \\
&= \{H \circ \Psi_{g^{-1}}, f\} \\
&= \{H, f\} \\
&= X_H(f).
\end{aligned}$$

Como f era arbitrária, obtém-se a igualdade

$$\Psi_g \cdot X_H = X_H.$$

Por um lado, o lema A.0.6 garante que $\Psi_g \circ \sigma_t \circ \Psi_{g^{-1}}$ é o fluxo de $\Psi_g \cdot X_H$, por outro lado, da igualdade acima conclui-se que σ_t é, também, o fluxo de $\Psi_g \cdot X_H$, de onde resulta, por unicidade do fluxo, que

$$\Psi_g \circ \sigma_t \circ \Psi_{g^{-1}} = \sigma_t,$$

ficando assim terminada a prova. □

Teorema 1.5.2 (Teorema da Redução da Dinâmica de Marsden & Weinstein)**.** *Nas condições do Teorema da Redução de Marsden & Weinstein, seja $H \in C^\infty(M)$ uma função G-invariante. Então, o fluxo σ_t do campo Hamiltoniano $X_H \in \mathcal{X}(M)$ induz canonicamente um fluxo δ_t em M_x através de*

$$\pi \circ \sigma_t = \delta_t \circ \pi. \tag{1.8}$$

O fluxo δ_t é gerado pelo campo de vetores $X_{H_x} \in \mathcal{X}(M_x)$, com Hamiltoniano $H_x \in C^\infty(M_x)$ dado por

$$H_x \circ \pi = H \circ i. \tag{1.9}$$

H_x diz-se o Hamiltoniano reduzido.

Demonstração. Comecemos por ver que, nas condições do enunciado, δ_t é um fluxo bem-definido em M_x. Dados $p, q \in N$ tais que $\pi(p) = \mathcal{O}_p^x = \mathcal{O}_q^x = \pi(q)$, existe $g \in G_x$ tal que $q = \Psi_g(p)$. Então, recorrendo ao lema 1.5.1, tem-se

$$\pi \circ \sigma_t(q) = \pi \circ \sigma_t \circ \Psi_g(p) = \pi \circ \Psi_g \circ \sigma_t(p) = \pi \circ \sigma_t(p),$$

uma vez que

$$\pi(\Psi_g(\sigma_t(p))) = \pi(\sigma_t(p)),$$

ficando assim provado que a aplicação δ_t, dada através de (1.8), está bem-definida. Falta ver que é um fluxo em M_x. Dados $p \in N$ e $t, s \in I_p$ tais que $t + s \in I_p$, onde I_p representa o domínio da curva integral $\sigma_t(p)$ em N, tem-se

- $\delta_0(\pi(p)) = \pi(\sigma_0(p)) = \pi(p)$;
- $\delta_{t+s}(\pi(p)) = \pi \circ \sigma_{t+s}(p) = \pi \circ \sigma_t \circ \sigma_s(p) = \delta_t \circ \pi \circ \sigma_s(p) = \delta_t \circ \delta_s(\pi(p))$,

de onde resulta o pretendido.

Agora, como H é G-invariante, em particular H é constante em cada órbita $\mathcal{O}_p^x$, com $p \in N$, de onde resulta que H_x, dada através de (1.9), está bem-definida. Vamos provar que o campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M_x)$ que gera δ_t é um campo Hamiltoniano, com Hamiltoniano $H_x \in C^\infty(M_x)$. Dado $p \in N$, seja $[u] = (d\pi)_p(u) \in T_{[p]}(M_x)$, com $u \in T_pN$. Então,

$$\begin{aligned}
(dH_x)_{[p]}([u]) &= d(H_x \circ \pi)_p(u) \\
&= d(i^*H)_p(u) \\
&= (i^*dH)_p(u) \\
&= -(i^*\omega)_p(X_H(p), u).
\end{aligned}$$

Por outro lado, recorrendo à definição de fluxo, tem-se

$$\begin{aligned}
(d\pi)_p(X_H(p)) &= (d\pi)_p \left(\left. \frac{d(\sigma_t(p))}{dt} \right|_{t=0} \right) \\
&= \left. \frac{d(\pi \circ \sigma_t(p))}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d(\delta_t \circ \pi(p))}{dt} \right|_{t=0} \\
&= Y(\pi(p)).
\end{aligned}$$

Assim, lembrando o Teorema da Redução de Marsden & Weinstein, tem-se

$$\begin{aligned}
(dH_x)_{[p]}([u]) &= -(i^*\omega)_p(X_H(p), u) \\
&= -(\pi^*\omega^x)_p(X_H(p), u) \\
&= -\omega^x_{[p]}(Y(\pi(p)), [u]),
\end{aligned}$$

ou seja, Y é um campo Hamiltoniano com Hamiltoniano H_x, ficando assim concluída a prova. $\square$

Capítulo 2

Redução de variedades de Poisson

Este capítulo é dedicado ao estudo do teorema da redução de variedades de Poisson formulado por Marsden e Ratiu em [12], que vem generalizar o Teorema da Redução de Marsden & Weinstein. Denominaremos tal resultado por Teorema da Redução de Marsden & Ratiu.

Para um melhor entendimento do enunciado e respetiva demonstração do teorema torna-se necessário reunir alguns conceitos e resultados de geometria de Poisson antes de podermos prosseguir com o nosso estudo.

2.1 Preliminares

2.1.1 Variedades de Poisson

Definição 2.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável. A um parêntesis*

$$\begin{aligned} \{\ ,\ \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longrightarrow \quad C^\infty(M) \\ (f,g) &\longmapsto \quad \{f,g\} \end{aligned}$$

que satisfaz, para todos $f, g, h \in C^\infty(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$,

1. *antissimetria:*
$$\{g,f\} = -\{f,g\};$$

2. *$\mathbb{R}$-linearidade no 1º argumento:*
$$\{af + bg, h\} = a\{f,h\} + b\{g,h\};$$

3. *identidade de Jacobi no 1º argumento:*
$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0;$$

4. regra de Leibniz no 1º argumento:

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g,$$

dá-se o nome de parêntesis de Poisson ou estrutura de Poisson em M. A uma variedade munida com uma tal estrutura dá-se o nome de variedade de Poisson e denota-se por $(M, \{\ ,\ \})$.

De notar que a antissimetria de um parêntesis de Poisson garante a $\mathbb{R}$-linearidade, a identidade de Jacobi e a regra de Leibniz no 2º argumento.

Nota 2.1.2. *As propriedades 1 a 3 da definição 2.1.1 garantem que, em particular, $(C^\infty(M), \{\ ,\ \})$ é uma álgebra de Lie real (de dimensão infinita), chamada de álgebra de Poisson-Lie.*

Seguem-se três dos exemplos mais simples de variedades de Poisson:

Exemplo 2.1.3. *Qualquer variedade diferenciável M com $\{\ ,\ \} = 0$ é uma variedade de Poisson.*

Exemplo 2.1.4. *Qualquer variedade simplética com parêntesis de Poisson definido como em 1.1.6 é uma variedade de Poisson.*

Exemplo 2.1.5. *Seja $(\mathcal{G}, [\ ,\ ])$ uma álgebra de Lie real de dimensão finita e considere-se $\mathcal{G}^*$ o seu espaço vetorial dual enquanto variedade diferenciável. Dada $f \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$, para cada $\alpha \in \mathcal{G}^*$ tem-se $df_\alpha \in (\mathcal{G}^*)^* \cong \mathcal{G}$. Com esta correspondência entre $(\mathcal{G}^*)^*$ e $\mathcal{G}$ defina-se o parêntesis $\{\ ,\ \}$ através de*

$$\{f, g\}(\alpha) = \langle \alpha, [df_\alpha, dg_\alpha] \rangle\,,$$

para todo $\alpha \in \mathcal{G}^*$ e $f, g \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$. Este parêntesis define, de facto, uma estrutura de Poisson em $\mathcal{G}^*$, designada por estrutura de Lie-Poisson em $\mathcal{G}^*$.

Lema 2.1.6. *Dada uma variedade de Poisson $(M, \{\ ,\ \})$ e $f \in C^\infty(M)$, a aplicação*

$$\begin{aligned} X_f : C^\infty(M) &\longrightarrow \quad C^\infty(M) \\ g &\longmapsto \quad \{f, g\} \end{aligned}$$

é uma derivação em $C^\infty(M)$.

Tal resultado sai diretamente da $\mathbb{R}$-linearidade e regra de Leibniz no 2º argumento do parêntesis de Poisson da variedade M.

Definição 2.1.7. *Ao campo de vetores associado à derivação definida no lema 2.1.6 dá-se o nome de campo Hamiltoniano de f e representa-se por X_f. Tal campo satisfaz a identidade*

$$dg(X_f) = \{f, g\},$$

qualquer que seja $g \in C^\infty(M)$.

A proposição seguinte pode ser encontrada em [9] (capítulo 3, pág. 109, proposição 8.5):

Proposição 2.1.8. *A aplicação*

$$\begin{aligned} (C^\infty(M), \{\ ,\ \}) &\longrightarrow (\mathcal{X}(M), [\ ,\ ]) \\ f &\longmapsto X_f \end{aligned}$$

é um homomorfismo de álgebras de Lie, isto é, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$, tem-se

- $\mathbb{R}$-*linearidade:*
$$X_{af+bg} = aX_f + bX_g;$$
- $X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]$.

Demonstração. Uma vez que, fixado $f \in C^\infty(M)$, X_f é um campo de vetores (por ser uma derivação), tem-se,

- quaisquer que sejam $f, g, h \in C^\infty(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$,
$$X_{af+bg}(h) = \{af + bg, h\} = a\{f, h\} + b\{g, h\} = aX_f(h) + bX_g(h);$$
- quaisquer que sejam $f, g, h \in C^\infty(M)$, por um lado tem-se
$$X_{\{f,g\}}(h) = \{\{f, g\}, h\},$$
por outro, recorrendo à identidade de Jacobi do parêntesis de Poisson, tem-se
$$\begin{aligned} [X_f, X_g](h) &= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) \\ &= X_f(\{g, h\}) - X_g(\{f, h\}) \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\ &= \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} \\ &= -\{h, \{f, g\}\} \\ &= \{\{f, g\}, h\}. \end{aligned}$$

□

Lema 2.1.9. *Dada uma variedade de Poisson $(M, \{\ ,\ \})$ de dimensão n e $\{x_1, ..., x_n\}$ um sistema de coordenadas locais em M, tem-se, para todas as funções $f, g \in C^\infty(M)$,*

$$\{f, g\} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \{x_i, x_j\}.$$

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(M)$ qualquer e considere-se a função coordenada x_j. Então, recorrendo à noção de campo Hamiltoniano e à noção de diferencial de uma função num ponto, tem-se

$$\{x_j, f\} = df(X_{x_j}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i(X_{x_j}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\{x_j, x_i\}.$$

Considere-se agora $g \in C^\infty(M)$ arbitrária. Então, recorrendo ao ponto anterior e à antissimetria do parêntesis de Poisson, tem-se

$$\begin{aligned}\{f, g\} = dg(X_f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j(X_f) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}\{f, x_j\} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}\{x_j, f\} \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\{x_j, x_i\}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\{x_i, x_j\} \\ &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\{x_i, x_j\}.\end{aligned}$$

□

2.1.2 Tensor e morfismo de Poisson

A proposição seguinte pode ser encontrada em [1] (pág. 81, proposição 2.2.6) e dá-nos uma caracterização bastante útil das 1-formas algébricas numa variedade diferenciável.

Proposição 2.1.10. *Dada uma variedade diferenciável M e $p \in M$, vale a implicação*

$$\alpha_p \in T_p^*M \implies \exists f \in C^\infty(M) : df_p = \alpha_p. \tag{2.1}$$

Tendo em conta a proposição anterior, podemos então associar a uma variedade de Poisson $(M, \{\ ,\ \})$ um 2-tensor contravariante e antissimétrico, definido ponto a ponto como se segue:

Definição 2.1.11. *Dada uma variedade de Poisson $(M, \{\ ,\ \})$, dá-se o nome de tensor de Poisson associado a $\{\ ,\ \}$ à aplicação*

$$P : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

que, para todo $p \in M$ e $f, g \in C^\infty(M)$, verifica

$$P_p(df_p, dg_p) = P(df, dg)(p) = \{f, g\}(p).$$

Nota 2.1.12. *A $\mathbb{R}$-bilinearidade e antissimetria do parêntesis de Poisson, bem como o facto de este satisfazer a regra de Leibniz, garantem que P, como definido acima, é de facto um 2-tensor contravariante e antissimétrico. No* *entanto, P terá de obdecer a uma condição extra para garantir a identidade de Jacobi do parêntesis de Poisson. De facto, a identidade de Jacobi é satisfeita se e só se*

$$[P, P] = 0,$$

onde o parêntesis acima designa o parêntesis de Schouten, que não iremos definir por não ter relevância no trabalho que se segue.

Como, pelo lema 2.1.9, o valor de $\{f, g\}(p)$ apenas depende de df_p, dg_p e do parêntesis de Poisson das coordenadas locais, o tensor de Poisson pode ser definido, alternativamente, da seguinte forma:

Definição 2.1.13. *Dada uma variedade de Poisson $(M, \{\ ,\ \})$, dá-se também o nome de tensor de Poisson associado a $\{\ ,\ \}$ a*

$$P \in \Gamma(\wedge^2 TM)$$

que, para cada $p \in M$ é dada, em coordenadas locais $\{x_1, ..., x_n\}$, por

$$P_p = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P_{ij}(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \wedge \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p,$$

com $P_{ij} = \{x_i, x_j\}$.

Nota 2.1.14. *Com base na correspondência que existe entre um espaço vectorial e o dual do seu dual, tem lugar a identificação*

$$\left\langle (dx_i)_p, \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \right\rangle = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p, (dx_i)_p \right\rangle = \delta_{ij}.$$

Para confirmar que as definições 2.1.11 e 2.1.13 são, de facto, equivalentes, considerem-se 1-formas diferenciais $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ expressas, em coordenadas locais $\{x_1, ..., x_n\}$, por

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p)(dx_i)_p \text{ e } \beta_p = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(p)(dx_i)_p,$$

com $\alpha_i, \beta_i \in C^\infty(M)$. Então, pela definição 2.1.13,

$$\begin{aligned}
P_p(\alpha_p, \beta_p) &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P_{ij}(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \wedge \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p (\alpha_p, \beta_p) \\
&= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P_{ij}(p)(\alpha_i(p)\beta_j(p) - \alpha_j(p)\beta_i(p)) \\
&= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i(p)\beta_j(p) - \alpha_j(p)\beta_i(p))\{x_i, x_j\}(p).
\end{aligned}$$

Por outro lado, como existem funções $f, g \in C^\infty(M)$ tais que $\alpha_p = df_p$ e $\beta_p = dg_p$, tem-se

$$\alpha_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \text{ e } \beta_i(p) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(p),$$

de onde resulta, recorrendo ao lema 2.1.9, a definição 2.1.11.

Dada uma variedade de Poisson $(M, \{\ ,\ \})$, chamaremos também ao tensor de Poisson P, correspondende ao parêntesis de Poisson $\{\ ,\ \}$, de estrutura de Poisson associada à variedade M.

Definição 2.1.15. *Dada uma variedade de Poisson* $(M, \{\ ,\ \})$*, dá-se o nome de morfismo de Poisson ao morfismo de módulos*

$$P^\# : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

tal que, para cada $p \in M$ *e cada* $\alpha \in \Omega^1(M)$*,* $P^\#(\alpha)(p) = P_p^\#(\alpha_p)$ *representa o único elemento de* T_pM *que satisfaz*

$$\left\langle \beta_p, P_p^\#(\alpha_p) \right\rangle = P_p(\alpha_p, \beta_p), \quad \forall \beta_p \in T_p^*M.$$

Para não tornar a notação demasiado pesada usaremos abreviações da forma

$$\#\alpha = P^\#(\alpha) \in \mathcal{X}(M)$$

e

$$\#\alpha_p = (\#\alpha)(p) = P_p^\#(\alpha_p) \in T_pM,$$

com $\alpha \in \Omega^1(M)$ e $p \in M$.

De notar que, em particular, fixado $f \in C^\infty(M)$, se tem, para todo $p \in M$ e $g \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} \langle dg_p, \#df_p \rangle &= P_p(df_p, dg_p) \\ &= \{f, g\}(p) \\ &= dg_p(X_f(p)) \\ &= \langle dg_p, X_f(p) \rangle . \end{aligned}$$

Como esta igualdade é válida para todo $p \in M$ e $g \in C^\infty(M)$, tem-se

$$\#df_p = X_f(p), \quad \forall p \in M,$$

de onde se conclui que

$$\#df = X_f.$$

Nota 2.1.16. *No caso particular de estarmos a considerar uma variedade simplética* (M, ω) *com o parêntesis de Poisson associado a* ω *como visto na definição 1.1.6, o morfismo de Poisson* $P^\#$ *será, na realidade, um isomorfismo de módulos com inversa* $\omega^\flat$ *(recordando a definição 1.1.2). De facto,* *tendo em consideração a afirmação (2.1) vista no início desta subsecção, dados $p \in M$, $f, g \in C^\infty(M)$ e $Y \in \mathcal{X}(M)$ quaisquer, por um lado tem-se*

$$(\omega^\flat(\#df))(Y)(p) = -(i_{X_f}\omega)(Y)(p) = df(Y)(p)$$

e, por outro lado, tem-se

$$\left\langle dg_p, \#(\omega^\flat(X_f))(p)\right\rangle = \langle dg_p, \#df_p\rangle = \langle dg_p, X_f(p)\rangle .$$

Definição 2.1.17. *Seja $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson. Dá-se o nome de distribuição característica de P ao subconjunto de TM dado por*

$$C = P^\#(T^*M),$$

isto é, à imagem do morfismo $P^\#$. Dá-se o nome de espaço característico no ponto $p \in M$ à fibra C_p da distribuição característica em p, isto é, ao subespaço vetorial de T_pM dado por

$$C_p = P_p^\#(T_p^*M).$$

À característica do 2-tensor P no ponto p, isto é, à dimensão de C_p, dá-se o nome de característica da estrutura de Poisson em p.

Nota 2.1.18. *Fixado um sistema de coordenadas locais $\{x_1, ..., x_n\}$, define-se a matriz de Poisson em $p \in M$ (ou matriz de $P_p^\#$) como sendo*

$$(-P_{ij}(p))_{i,j\in\{1,..,n\}} ,$$

onde $P_{ij}(p) = \{x_i, x_j\}(p)$. A característica da estrutura de Poisson em p é dada pela característica da matriz de Poisson nesse ponto, pelo que se pode concluir que é sempre par, uma vez que se trata de uma matriz antissimétrica. No entanto, a distribuição característica não tem necessariamente de definir um subfibrado de TM, uma vez que a característica da estrutura de Poisson pode variar com o ponto. No caso particular de M ser simplética, tem-se efetivamente

$$dim(C_p) = dim(M), \quad \forall p \in M$$

uma vez que, nesse caso, $P^\#$ é um isomorfismo de módulos. As matrizes que representam $\omega^\flat$ e $P^\#$ num sistema de coordenadas locais são inversas uma da outra.

Lema 2.1.19. *Seja $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson e $E \subseteq TM$ um subfibrado de TM. Então,*

$$\#(\#E^0)^0 \subseteq E,$$

onde # representa o morfismo de Poisson associado a $\{\ ,\ \}$.

Demonstração. Considere-se $\alpha \in E^0$ e $\beta \in (\#E^0)^0$ arbitrários. Uma vez que $\#\alpha \in \#E^0$, tem-se

$$0 = \langle \beta, \#\alpha \rangle = P(\alpha, \beta) = -P(\beta, \alpha) = -\langle \alpha, \#\beta \rangle,$$

onde P representa o tensor de Poisson e $\#$ o morfismo de Poisson associados à variedade $(M, \{\ ,\ \})$, respetivamente. Como $\alpha \in E^0$ é arbitrária, e uma vez que o lema A.0.16 garante que

$$\mathrm{Ker}\left(E^0\right) = E,$$

conclui-se que

$$\#\beta \in E,$$

ficando assim concluída a prova. □

Lema 2.1.20. *Seja $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson e $S, T \subseteq TM$ dois subfibrados de TM. Então,*

$$\#S^0 \subseteq T \iff \#T^0 \subseteq S,$$

onde $\#$ representa o morfismo de Poisson associado a $\{\ ,\ \}$.

Demonstração. Recorrendo às definições de anulador de um espaço vetorial e de morfismo de Poisson, bem como ao lema 2.1.19, tem-se

$$\#S^0 \subseteq T \iff T^0 \subseteq (\#S^0)^0 \implies \#T^0 \subseteq \#(\#S^0)^0 \subseteq S.$$

Para a implicação recíproca basta trocar os papéis de S e T. □

2.1.3 Aplicações e automorfismos infinitesimais de Poisson

Se nada for dito em contrário, todas as definições e resultados presentes nesta subsecção podem ser encontrados em [9] (capítulo 3, secções 9 e 10). Sempre que tal não se aplique, a devida referenciação será feita.

Definição 2.1.21. *Sejam $(M_1, \{\ ,\ \}_1)$ e $(M_2, \{\ ,\ \}_2)$ duas variedades de Poisson e considere-se uma aplicação diferenciável*

$$\varphi : M_1 \longrightarrow M_2.$$

φ diz-se uma aplicação de Poisson se, quaisquer que sejam $f, g \in C^\infty(M_2)$, se verifica

$$\{f, g\}_2 \circ \varphi = \{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_1.$$

Nota 2.1.22. *Atendendo ao lema 1.2.35, dada uma variedade simplética (M, ω), com parêntesis de Poisson $\{\ ,\ \}$ associado a ω definido como em 1.1.6, qualquer simplectomorfismo $\varphi \in Simp(M)$ é uma aplicação de Poisson.*

A proposição seguinte pode ser encontrada em [9] (capítulo 3, pág. 115, proposição 9.2).

Proposição 2.1.23. *Sejam $(M_1, \{\ ,\ \}_1)$ e $(M_2, \{\ ,\ \}_2)$ duas variedades de Poisson e considere-se um difeomorfismo*

$$\varphi : M_1 \longrightarrow M_2.$$

Se φ for uma aplicação de Poisson, então φ^{-1} também é uma aplicação de Poisson. Nesse caso, φ diz-se um difeomorfismo de Poisson.

Definição 2.1.24. *Seja $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson. Um campo de vetores $X \in \mathcal{X}(M)$ diz-se um automorfismo infinitesimal de Poisson se, para todo $t \in \mathbb{R}$, o fluxo de X*

$$\sigma_t : D_t \longrightarrow D_{-t}$$

for uma aplicação de Poisson.

Proposição 2.1.25. *Seja $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson e $X \in \mathcal{X}(M)$. As seguintes condições são equivalentes:*

- *X é um automorfismo infinitesimal de Poisson;*
- *X é uma derivação da álgebra de Poisson-Lie $(C^\infty(M), \{\ ,\ \})$, isto é,*

$$X(\{f, g\}) = \{X(f), g\} + \{f, X(g)\}, \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Corolário 2.1.26. *Seja $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson. Todos os campos Hamiltonianos $X_f \in \mathcal{X}(M)$, com $f \in C^\infty(M)$, são automorfismos de Poisson.*

Dada uma variedade de Poisson $(M, \{\ ,\ \})$ e $N \subseteq M$ uma subvariedade de M, geralmente não existe uma estrutura de Poisson em N para a qual a inclusão

$$i : N \hookrightarrow M$$

seja uma aplicação de Poisson. Quando tal acontece, a subvariedade N terá um nome particular:

Definição 2.1.27. *Seja $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson. $N \subseteq M$ diz-se uma subvariedade de Poisson se existir uma estrutura de Poisson $\{\ ,\ \}_N$ em N para a qual a inclusão*

$$i : N \hookrightarrow M$$

é uma aplicação de Poisson, isto é,

$$\{f, g\} \circ i(p) = \{f \circ i, g \circ i\}_N(p), \quad \forall p \in N, \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Se existir, tal estrutura é única.

Esta definição pode ser encontrada em [17] (pág. 527 e 528). Segue-se agora um lema que dá duas caracterizações equivalentes das subvariedades de Poisson e que podem ser encontradas em [3] (Submanifolds in Poisson geometry: a survey, pág. 405) e em [17] (pág. 528, lema 1.1):

Lema 2.1.28. *Dada uma variedade de Poisson $(M, \{\ ,\ \})$, $N \subseteq M$ uma subvariedade de M e sendo $\# : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$, o morfismo de Poisson associado a $\{\ ,\ \}$, as seguintes condições são equivalentes:*

- *N é uma subvariedade de Poisson;*
- $\#(T_p^*M) \subseteq T_pN, \quad \forall p \in N;$
- $\#(T_pN)^0 = \{\overrightarrow{0}\}, \quad \forall p \in N.$

2.1.4 Distribuições integráveis

Nesta subsecção vamos definir vários conceitos e enunciar resultados referentes a distribuições em variedades diferenciáveis, cuja característica não tem de ser necessariamente constante. Sempre que a característica da distribuição for constante, tal facto será explicitamente mencionado. Todo o conteúdo desta subsecção pode ser encontrado em [9] (apêndice 3).

Definição 2.1.29. *Dada uma variedade diferenciável M, dá-se o nome de distribuição generalizada em M a um subconjunto $F \subseteq TM$ tal que, para todo $p \in M$, a fibra*

$$F_p = F \cap T_pM$$

é um subespaço vetorial de T_pM. A dimensão de F_p diz-se a característica da distribuição F em p e pode variar com p.

Definição 2.1.30. *Seja F uma distribuição generalizada em M. Então,*

- *dá-se o nome de secção diferenciável de F a um campo de vetores (diferenciável) X definido num aberto $U \subseteq M$ tal que*

  $$X(p) \in F_p, \quad \forall p \in U;$$

- *F diz-se diferenciável se, para todo $p \in M$ e $u \in F_p$, existe uma secção diferenciável X de F, definida numa vizinhança aberta de p, tal que*

  $$X(p) = u;$$

- *dá-se o nome de integral de F a um par (N, h), com N uma variedade diferenciável conexa e*

  $$h : N \longrightarrow M$$

  uma imersão que satisfaz, para todo $p \in N$,

  $$dh_p(T_pN) \subseteq F_{h(p)};$$

- *diz-se que um integral (N, h) de F tem dimensão maximal em $p \in N$ se*
$$dh_p(T_pN) = F_{h(p)};$$

- *dá-se o nome de variedade integral de F a uma subvariedade imersa e conexa $N \subseteq M$ para a qual (N, i_N) é um integral de F, onde*
$$i_N : N \hookrightarrow M$$
é a inclusão de N em M.

A nota seguinte pode ser encontrada em [9] (apêndice 3, pág. 384, nota 1.5):

Nota 2.1.31. *Na notação da definição anterior, tem-se que*

1. *uma variedade integral de F não é, necessariamente, uma subvariedade mergulhada de M;*
2. *se (N, h) é um integral de F e h é uma imersão injetiva, então $h(N)$ é uma variedade integral de F.*

Definição 2.1.32. *Uma distribuição generalizada F diz-se integrável se, para todo $p \in M$, existe uma variedade integral de F que contém p e tem dimensão maximal em todos os seus pontos.*

Definição 2.1.33. *Uma variedade integral N de F diz-se maximal se tiver dimensão maximal em todos os seus pontos e for tal que não exista nenhuma outra variedade integral de F que contenha estritamente N e seja maximal em todos os seus pontos.*

Teorema 2.1.34. *Seja M uma variedade diferenciável e F uma distribuição generalizada integrável em M. Então, para todo $p \in M$, existe uma única variedade integral N de F que contém p e é maximal. As variedades integrais maximais de F formam uma partição de M, chamada folheação generalizada de M definida por F. As variedades integrais maximais dizem-se as folhas da folheação.*

No caso particular da distribuição ter característica constante, tem-se o famoso teorema:

Teorema 2.1.35 (Teorema de Frobenius)**.** *Seja M uma variedade diferenciável e F uma distribuição generalizada diferenciável de característica constante. Então, F é integrável se e só se, para todo o par (X, Y) de secções diferenciáveis de F definidas no mesmo aberto U, $[X, Y]$ é também uma secção diferenciável de F.*

2.2 Teorema da Redução de Marsden & Ratiu

Por uma questão de coerência, iremos adotar uma notação mais próxima da usada em [4] por Falceto e Zambon no estudo do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu.

Definição 2.2.1. *Seja M uma variedade diferenciável, $N \subseteq M$ uma subvariedade de M e considere-se um subfibrado*

$$B \subseteq T_N M,$$

onde $T_N M$ representa a restrição do fibrado TM a N. Dizemos que uma função $f \in C^\infty(M)$ é B-invariante se a sua diferencial, em qualquer ponto de N, anular B, isto é,

$$df_p(u) = 0, \quad \forall p \in N, \forall u \in B_p.$$

O conjunto das funções B-invariantes será denotado por $C^\infty(M)_B$.

Definição 2.2.2. *Seja $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson. Então, nas condições da definição 2.2.1, o subfibrado B diz-se canónico se tem lugar a implicação*

$$f, g \in C^\infty(M)_B \implies \{f, g\} \in C^\infty(M)_B.$$

Comecemos por estipular em que ambiente vamos trabalhar. Considerem-se as seguintes condições:

1. $(M, \{\ ,\ \})$: variedade de Poisson;
2. $N \subseteq M$: subvariedade mergulhada de M, com mergulho dado pela inclusão
$$i : N \hookrightarrow M;$$
3. $B \subseteq T_N M$: sufibrado de TM restrito a N;
4. $F = B \cap TN$: distribuição integrável regular (isto é, de característica constante) em N;
5. A folheação de N definida por F é regular (ou simples).

Relativamente ao ponto 5, o teorema 2.1.34 garante a existência de uma folheação de N definida por F, cujas folhas terão todas dimensão igual à característica de F por esta ser constante. Assumindo que tal folheação é regular (ou simples), o espaço das folhas, que vamos denotar por

$$\overline{N} = N/F,$$

terá uma estrutura de variedade diferenciável para a qual a projeção canónica

$$\pi : N \longrightarrow \overline{N}$$

é uma submersão. Tal resultado, bem como a definição de folheação regular (ou simples) podem ser encontrados nas notas de aula de Geometria Diferencial de Rui Loja Fernandes em [5] (pág. 68, corolário 9.9).

Antes de avançarmos para o Teorema da Redução de Marsden & Ratiu apresentamos dois resultados que ajudarão a tornar a prova do teorema mais clara e que podem ser encontrados em [15] (capítulo 10, pág. 384, lema 10.4.14 e pág. 385 e 386, na prova do teorema 10.4.12, respetivamente), cujas demonstrações, bastante técnicas, optamos por não incluir neste trabalho.

Lema 2.2.3. *Nas condições 1 a 5 acima descritas, dado $f \in C^\infty(\overline{N})$, é sempre possível estender a função $f \circ \pi$ a M de forma B-invariante, ou seja, existe $f^B \in C^\infty(M)_B$ tal que $f^B\big|_N = f \circ \pi$.*

Nota 2.2.4. *De notar que as extensões mencionadas no lema 2.2.3 não são necessariamente únicas. Por outro lado, dada uma função $f^B \in C^\infty(M)_B$ qualquer, existe uma e uma só função $f \in C^\infty(\overline{N})$ tal que*

$$f \circ \pi(p) = f^B(p), \quad \forall p \in N,$$

uma vez que o lema A.0.15 garante que f^B é constante em cada folha da folheação de N definida por F (como $F \subseteq B$ e f^B é B-invariante, f^B também é, em particular, F-invariante). Dizemos então que f^B restrita a N induz uma (única) função em $C^\infty(\overline{N})$.

Lema 2.2.5. *Nas condições 1 a 5 acima descritas, dado $p \in N$,*

- *se $\alpha_p \in B_p^0$, então existe $f^B \in C^\infty(M)_B$ tal que*

$$\alpha_p = \left(df^B\right)_p;$$

- *se $\alpha_p \in B_p^0 \cap (T_pN)^0$, então existe $f^B \in C^\infty(M)_B$ cuja restrição a N é a função nula e é tal que*

$$\alpha_p = \left(df^B\right)_p.$$

Nota 2.2.6. *Na realidade, os lemas 2.2.3 e 2.2.5 foram provados por Ortega e Ratiu localmente. No entanto, uma vez que todos os resultados onde tais lemas serão utilizados assentam em construções e operações locais, com um certo abuso de linguagem optamos por os enunciar de forma global na tentativa de simplificar notação. Tal facto volta a ser mencionado no capítulo 3 (nota 3.1.2).*

Definição 2.2.7. *Nas condições 1 a 5 acima descritas e assumindo B canónico, $(M, \{\ ,\ \}, N, B)$ diz-se Poisson-redutível se existir uma estrutura de Poisson $\{\ ,\ \}_{\overline{N}}$ em $\overline{N}$ tal que, para todas as funções $f, g \in C^\infty(\overline{N})$ e todas as funções $f^B, g^B \in C^\infty(M)_B$ cujas restrições a N sejam iguais a, respetivamente, $f \circ \pi$ e $g \circ \pi$, se tem*

$$\{f, g\}_{\overline{N}} \circ \pi = \left\{f^B, g^B\right\} \circ i. \tag{2.2}$$

Estamos agora em condições de enunciar, e provar, o Teorema da Redução de Marsden & Ratiu. O teorema, bem como a sua demonstração, podem ser encontrados em [12], mas sem tanto detalhe como o que aqui iremos apresentar.

Teorema 2.2.8 (Teorema da Redução de Marsden & Ratiu)**.** *Nas condições 1 a 5 acima descritas e assumindo B canónico, $(M, \{\ ,\ \}, N, B)$ é Poisson-redutível se e só se*

$$\#B^0 \subseteq B + TN, \tag{2.3}$$

onde $\#$ representa o morfismo de Poisson associado a $\{\ ,\ \}$.

Demonstração. Comecemos por assumir que o quarteto $(M, \{\ ,\ \}, N, B)$ é Poisson-redutível. Dado $p \in N$, considere-se $\alpha_p \in B_p^0$. Então, o lema 2.2.5 garante que existe $f^B \in C^\infty(M)_B$ tal que

$$\left(df^B\right)_p = \alpha_p.$$

Recordando o lema A.0.16, considere-se agora β_p, uma 1-forma algébrica arbitrária em $(B_p + T_pN)^0 = B_p^0 \cap (T_pN)^0$. Recorrendo novamente ao lema 2.2.5, escolha-se uma função $g^B \in C^\infty(M)_B$ cuja restrição a N seja a função nula e tal que

$$\left(dg^B\right)_p = \beta_p.$$

Considere-se $g \in C^\infty(\overline{N})$ induzida por g^B restrita a N, isto é,

$$g \circ \pi(q) = g^B(q), \quad \forall q \in N.$$

Como a restrição de g^B a N é a função nula, tem-se $g = 0$. Então, recorrendo à condição (2.2), tem-se

$$\begin{aligned}
\langle \beta_p, \#\alpha_p \rangle &= P_p\left(\left(df^B\right)_p, \left(dg^B\right)_p\right) \\
&= \left\{f^B, g^B\right\}(p) \\
&= \{f, 0\}_{\overline{N}} \circ \pi(p) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde f é a função em $C^\infty(\overline{N})$ induzida por f^B restrita a N. Pode então concluir-se que

$$\#\alpha_p \in B_p + T_pN,$$

uma vez que β_p é arbitrário em $(B_p + T_pN)^0$ e, pelo lema A.0.16, se tem

$$Ker\left((B_p + T_pN)^0\right) = B_p + T_pN,$$

ficando assim provado que

$$\#B_p^0 \subseteq B_p + T_pN.$$

Assuma-se agora que a condição (2.3) é verificada. Queremos provar que $(M, \{\ ,\ \}, N, B)$ é Poisson-redutível. Considerem-se $f, g \in C^\infty(\overline{N})$ e $f^B, g^B \in C^\infty(M)_B$ extensões a M de $f \circ \pi$ e $g \circ \pi$, respetivamente (cuja existência é garantida pelo lema 2.2.3). Como B é canónico, $\left\{f^B, g^B\right\} \in C^\infty(M)_B$, logo a restrição de $\left\{f^B, g^B\right\}$ a N induz uma função $h \in C^\infty(\overline{N})$ através de

$$h \circ \pi(p) = \left\{f^B, g^B\right\}(p), \quad \forall p \in N.$$

Vamos agora ver que h não depende da escolha das extensões f^B e g^B. Considere-se g'^B outra extensão B-invariante de $g \circ \pi$ a M. Como

$$g^B(p) = g \circ \pi(p) = g'^B(p), \quad \forall p \in N,$$

tem-se

$$\left(g^B - g'^B\right)(p) = 0, \quad \forall p \in N,$$

de onde resulta que

$$d\left(g^B - g'^B\right)_p(u) = 0, \quad \forall p \in N, \forall u \in T_pN.$$

Assim, e uma vez que $g^B - g'^B$ é uma função B-invariante, conclui-se que

$$d\left(g^B - g'^B\right) \in (B + TN)^0.$$

Como, por hipotese, $\#B^0 \subseteq B + TN$, e uma vez que $df^B \in B^0$, tem-se

$$\left\langle d\left(g^B - g'^B\right)_p, \#\left(df^B\right)_p\right\rangle = 0, \quad \forall p \in N,$$

logo, para todo $p \in N$,

$$\begin{aligned}\left\langle d\left(g^B - g'^B\right)_p, \#\left(df^B\right)_p\right\rangle = 0 &\iff \left\{f^B, g^B - g'^B\right\}(p) = 0\\ &\iff \left\{f^B, g^B\right\}(p) = \left\{f^B, g'^B\right\}(p).\end{aligned}$$

Por antissimetria do parêntesis de Poisson em M conclui-se que h também não depende da escolha da extensão B-invariante de $f \circ \pi$ a M. Assim,

$$\{f, g\}_{\overline{N}} := h \in C^\infty(\overline{N})$$

está bem-definida e é a única função para a qual a igualdade (2.2) é válida.

Falta provar que $\overline{N}$ é uma variedade de Poisson, com estrutura de Poisson $\{\ ,\ \}_{\overline{N}}$ definida como acima. Para isso, é necessário que $\{\ ,\ \}_{\overline{N}}$ seja antissimétrico, $\mathbb{R}$-linear no 1º argumento e que satisfaça a regra de Leibniz e a identidade de Jacobi no 1º argumento.

- Antissimetria:

  Resulta da mesma propriedade do parêntesis de Poisson em M.

- $\mathbb{R}$-linearidade no 1º argumento:

  Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2, g \in C^\infty(\overline{N})$ e $f_1^B, f_2^B, g^B \in C^\infty(M)_B$, extensões a M das funções $f_1 \circ \pi$, $f_2 \circ \pi$ e $g \circ \pi$, respetivamente. Como

  $$\left(af_1^B + bf_2^B\right)(p) = (af_1 + bf_2) \circ \pi(p), \quad \forall p \in N$$

  e, quaisquer que sejam $p \in N$ e $u \in B_p$,

  $$d\left(af_1^B + bf_2^B\right)_p(u) = a\left(df_1^B\right)_p(u) + b\left(df_2^B\right)_p(u) = 0,$$

  a função $af_1^B + bf_2^B$ é B-invariante e estende a M a função $(af_1 + bf_2) \circ \pi$. Assim,

  $$\begin{aligned}\{af_1 + bf_2, g\}_{\overline{N}} \circ \pi &= \left\{af_1^B + bf_2^B, g^B\right\} \circ i \\ &= \left(a\left\{f_1^B, g^B\right\} + b\left\{f_2^B, g^B\right\}\right) \circ i \\ &= a\{f_1, g\}_{\overline{N}} \circ \pi + b\{f_2, g\}_{\overline{N}} \circ \pi \\ &= \left(a\{f_1, g\}_{\overline{N}} + b\{f_2, g\}_{\overline{N}}\right) \circ \pi.\end{aligned}$$

- Regra de Leibniz no 1º argumento:

  Sejam $f, g, h \in C^\infty(\overline{N})$ e $f^B, g^B, h^B \in C^\infty(M)_B$ extensões a M das funções $f \circ \pi$, $g \circ \pi$ e $h \circ \pi$, respetivamente. Como

  $$\left(f^B g^B\right)(p) = (fg) \circ \pi(p), \quad \forall p \in N$$

  e, quaisquer que sejam $p \in N$ e $u \in B_p$,

  $$d\left(f^B g^B\right)_p(u) = g^B(p)\left(df^B\right)_p(u) + f^B(p)\left(dg^B\right)_p(u) = 0,$$

  a função $f^B g^B$ é B-invariante e estende a M a função $(fg) \circ \pi$. Assim,

  $$\begin{aligned}\{fg, h\}_{\overline{N}} \circ \pi &= \left\{f^B g^B, h^B\right\} \circ i \\ &= \left(\left\{f^B, h^B\right\} g^B + f^B\left\{g^B, h^B\right\}\right) \circ i \\ &= \left(\{f, h\}_{\overline{N}} \circ \pi\right)(g \circ \pi) + (f \circ \pi)\left(\{g, h\}_{\overline{N}} \circ \pi\right) \\ &= \left(\{f, h\}_{\overline{N}} g + f\{g, h\}_{\overline{N}}\right) \circ \pi.\end{aligned}$$

- Identidade de Jacobi no 1º argumento:

  Sejam $f, g, h \in C^\infty(\overline{N})$ e $f^B, g^B, h^B \in C^\infty(M)_B$ extensões a M das funções $f \circ \pi$, $g \circ \pi$ e $h \circ \pi$, respetivamente. Como, por hipótese, $\left\{f^B, g^B\right\} \in C^\infty(M)_B$, e uma vez que, pela igualdade (2.2), $\left\{f^B, g^B\right\}$ estende a M a função $\{f, g\}_{\overline{N}} \circ \pi$, tem-se

  $$\left\{\{f, g\}_{\overline{N}}, h\right\}_{\overline{N}} \circ \pi = \left\{\left\{f^B, g^B\right\}, h^B\right\} \circ i.$$

  Assim, a identidade de Jacobi no 1º argumento resulta da mesma propriedade do parêntesis de Poisson em M.

$\square$

2.3 Teorema da Redução da Dinâmica de Marsden & Ratiu

Vamos agora estudar o teorema da redução da dinâmica em variedades de Poisson usando distribuições. Inicialmente formulado por Marsden e Ratiu em [12] (pág. 164), foi posteriormente incluído num livro de Vaisman ([16], pág. 114, teorema 7.33), onde o autor acrescenta algumas condições, omissas no teorema original, necessárias à sua correta formulação. Denominaremos tal resultado por Teorema da Redução da Dinâmica de Marsden & Ratiu.

Comecemos por ver a proposição seguinte, que será necessária na prova do teorema que se lhe segue. Este resultado pode ser encontrado em [16] (pág. 113, proposição 7.32) e em [12] (pág. 163), sendo a formulação presente neste trabalho a encontrada no artigo de Marsden e Ratiu.

Proposição 2.3.1. *Nas condições do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu, considerem-se duas variedades Poisson-redutíveis* $(M_1, \{\ ,\ \}_1, N_1, B_1)$ *e* $(M_2, \{\ ,\ \}_2, N_2, B_2)$ *e uma aplicação de Poisson* $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ *tal que*

- $\varphi(N_1) \subseteq N_2$;
- $d\varphi(B_1) \subseteq B_2$, *isto é,*

$$(d\varphi)_p(u) \in (B_2)_{\varphi(p)}, \quad \forall p \in N_1, \forall u \in (B_1)_p;$$

- φ *envia folhas da folheação de* N_1 *definida por* $F_1 = TN_1 \cap B_1$ *em folhas da folheação de* N_2 *definida por* $F_2 = TN_2 \cap B_2$.

Então, φ *induz uma única aplicação de Poisson* $\widehat{\varphi} : \overline{N}_1 \longrightarrow \overline{N}_2$, *onde*

$$\overline{N}_i = N_i/(TN_i \cap B_i), \text{ com } i \in \{1, 2\},$$

que satisfaz

$$\pi_2 \circ \varphi \circ i_1 = \widehat{\varphi} \circ \pi_1, \tag{2.4}$$

à qual se dá o nome de redução de φ.

Demonstração. Comecemos por ver que $\widehat{\varphi}$ está bem-definida, isto é, que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \xrightarrow{\varphi \circ i_1} & N_2 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ \overline{N}_1 & \xrightarrow[\widehat{\varphi}]{} & \overline{N}_2 \end{array}$$

é comutativo. Seja $\widehat{\varphi} : \overline{N}_1 \longrightarrow \overline{N}_2$ dada por

$$\widehat{\varphi}([p]) = \pi_2(\varphi(p)), \quad \forall p \in N_1,$$

com $[p] = \pi_1(p) \in \overline{N}_1$. Dado $p \in N_1$, considere-se a folha S_1 de N_1 definida por F_1 que contém p. Como φ envia folhas em folhas, existe uma (única) folha S_2 de N_2 definida por F_2 que contém $\varphi(S_1)$ e, em particular, $\varphi(p)$. Considerando, com algum abuso de linguagem, S_1 e S_2 também como pontos de $\overline{N}_1$ e $\overline{N}_2$, respetivamente, isto é, $S_1 = \pi_1(p)$ e $S_2 = \pi_2(\varphi(p))$, fica então claro que $\widehat{\varphi}$ está bem-definida, uma vez que

$$\widehat{\varphi}([q]) = \pi_2(\varphi(q)) = S_2, \quad \forall q \in S_1.$$

Falta provar que $\widehat{\varphi}$ é uma aplicação de Poisson. Sejam $f, g \in C^\infty(\overline{N_2})$ e $f^{B_2}, g^{B_2} \in C^\infty(M_2)_{B_2}$ extensões (B_2-invariantes) a M_2 de $f \circ \pi_2$ e $g \circ \pi_2$, respetivamente. Então, como $\varphi(N_1) \subseteq N_2$ e $d\varphi(B_1) \subseteq B_2$, tem-se

$$d\left(f^{B_2} \circ \varphi\right)_p (u) = \left(df^{B_2}\right)_{\varphi(p)} (d\varphi_p(u)) = 0, \quad \forall p \in N_1, \forall u \in (B_1)_p,$$

ou seja, $f^{B_2} \circ \varphi \in C^\infty(M_1)_{B_1}$. Como, dado $p \in N_1$, se tem

$$f^{B_2} \circ \varphi(p) = f \circ \pi_2 \circ \varphi(p) = f \circ \widehat{\varphi} \circ \pi_1(p),$$

conclui-se que $f^{B_2} \circ \varphi$ é uma extensão (B_1-invariante) de $f \circ \widehat{\varphi} \circ \pi_1$ a M_1. Análogo para g. Então, recorrendo às definições de aplicação de Poisson e Poisson-redutibilidade, tem-se

$$\begin{aligned}
\pi_1^* \widehat{\varphi}^* \{f, g\}_{\overline{N}_2} &= \{f, g\}_{\overline{N}_2} \circ \pi_2 \circ \varphi \circ i_1 \\
&= \left\{f^{B_2}, g^{B_2}\right\}_2 \circ i_2 \circ \varphi \circ i_1 \\
&= \left\{f^{B_2} \circ \varphi, g^{B_2} \circ \varphi\right\}_1 \circ i_1 \\
&= \{f \circ \widehat{\varphi}, g \circ \widehat{\varphi}\}_{\overline{N}_1} \circ \pi_1 \\
&= \pi_1^* \{f \circ \widehat{\varphi}, g \circ \widehat{\varphi}\}_{\overline{N}_1}
\end{aligned}$$

de onde resulta que $\widehat{\varphi}$ é uma aplicação de Poisson, uma vez que π_1 é sobrejetiva. □

A formulação do teorema seguinte pode ser encontrada em [16] (pág. 114, teorema 7.33) e surge com algumas alterações relativamente ao seu homónimo, originalmente publicado por Marden e Ratiu em [12]:

Teorema 2.3.2 (Teorema da Redução da Dinâmica de Marsden & Ratiu)**.** *Nas condições do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu, considere-se* $(M, \{\ ,\ \}, N, B)$ *uma variedade Poisson-redutível. Se* $H \in C^\infty(M)_B$ *é uma função para a qual o fluxo* σ_t *do campo Hamiltoniano* $X_H \in \mathcal{X}(M)$ *conserva* N *e* B*, isto é,*

- $\sigma_t(N) \subseteq N$;
- $(d\sigma_t)(B) \subseteq B$*, ou seja,*

$$(d\sigma_t)_p(u) \in (B)_{\sigma_t(p)}, \quad \forall p \in N, \forall u \in B_p,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e domínio de definição correspondente, então σ_t induz difeomorfismos de Poisson $\widehat{\sigma_t}$ em $\overline{N}$, com $t \in \mathbb{R}$. $\widehat{\sigma_t}$ é um fluxo em $\overline{N}$ e o campo de vetores que o gera é um campo Hamiltoniano $X_h \in \mathcal{X}(\overline{N})$, com Hamiltoniano $h \in C^\infty(\overline{N})$ determinado, unicamente, através de

$$h \circ \pi = H \circ i.$$

Além disso, os campos de vetores $X_H|_N$ e X_h são π-relacionados, isto é,

$$X_h(\pi(p)) = d\pi_p(X_H(p)), \quad \forall p \in N.$$

Demonstração. Recordando o corolário 2.1.26, para cada $t \in \mathbb{R}$, σ_t é uma aplicação de Poisson no seu domínio de definição. Além disso, uma vez que, para cada $t \in \mathbb{R}$, σ_t é um difeomorfismo, então σ_t envia folhas da folheação de N definida por F em folhas da mesma folheação. De facto, sendo um difeomorfismo, em particular σ_t é uma imersão injetiva. Como, por hipótese, σ_t conserva N e B, conclui-se que σ_t também conserva F. Assim, dada uma variedade integral maximal (S, i) de F, $(S, \sigma_t \circ i)$ é, também, uma variedade integral de F. Recorrendo agora à nota 2.1.31, conclui-se que $\sigma_t(S)$ é uma variedade integral de F que, por sua vez, está contida numa e uma só folha da folheação de N definida por F, concluindo-se asim que σ_t envia folhas em folhas.

Estão então verificadas todas as hipóteses da proposição 2.3.1, que garante que σ_t induz difeomorfismos de Poisson $\widehat{\sigma_t}$ em $\overline{N}$, com $t \in \mathbb{R}$, através de

$$\widehat{\sigma_t} \circ \pi = \pi \circ \sigma_t \circ i.$$

Vamos agora verificar que $\widehat{\sigma_t}$ é um fluxo em $\overline{N}$. Dado $p \in N$, tem-se

- $\widehat{\sigma_0}(\pi(p)) = \pi(\sigma_0(p)) = \pi(p)$;
- $\widehat{\sigma_{t+s}}(\pi(p)) = \pi \circ \sigma_{t+s}(p) = \pi \circ \sigma_t \circ \sigma_s(p) = \widehat{\sigma_t} \circ \pi \circ \sigma_s(p) = \widehat{\sigma_t} \circ \widehat{\sigma_s}(\pi(p))$,

de onde resulta o pretendido.

Considere-se agora o campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(\overline{N})$ gerador de $\widehat{\sigma_t}$. Então $X_H|_N$ e Y são π-relacionados, uma vez que, dado $p \in N$, se tem

$$\begin{aligned}(d\pi)_p(X_H(p)) &= (d\pi)_p \left(\left.\frac{d(\sigma_t(p))}{dt}\right|_{t=0} \right) \\ &= \left.\frac{d(\pi \circ \sigma_t(p))}{dt}\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d(\widehat{\sigma_t} \circ \pi(p))}{dt}\right|_{t=0} \\ &= Y(\pi(p)).\end{aligned}$$

Falta verificar que $Y = X_h$, onde $h \in C^\infty(\overline{N})$ é a única função que satisfaz

$$h \circ \pi = H \circ i.$$

Como H é B-invariante, em particular é F-invariante, logo é constante em cada folha da folheação de N definida por F. Assim, h, satisfazendo a condição acima, existe, é única e está-bem-definida. Considere-se agora uma função $g \in C^\infty(\overline{N})$ qualquer e $g^B \in C^\infty(M)_B$ uma extensão (B-invariante) arbitrária de $g \circ \pi$ a M. Então, dado $p \in N$ e recorrendo à definição de Poisson-redutibilidade, uma vez que H é uma extensão B-invariante de $h \circ \pi$ a M, tem-se

$$\begin{aligned} dg_{\pi(p)}(X_h(\pi(p))) &= \{h, g\}_{\overline{N}} \circ \pi(p) \\ &= \left\{H, g^B\right\}(p) \\ &= \left(dg^B\right)_p (X_H(p)) \\ &= dg_{\pi(p)} \circ d\pi_p(X_H(p)). \end{aligned}$$

Como g era arbitrária, conclui-se que

$$X_h(\pi(p)) = d\pi_p(X_H(p)) = Y(\pi(p)), \quad \forall p \in N,$$

ficando assim finalizada a prova. □

2.4 Algumas considerações

Os autores parecem afirmar, em [12], que a redução simplética estudada na secção 1.3 é um caso particular do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu, considerando para isso funções G-invariantes. No entanto, como veremos abaixo, as noções de G-invariância e de B-invariância não são equivalentes, o que levanta dúvidas sobre o argumento referido em [12].

Como estamos a assumir que a ação Ψ é simplética (ou canónica, como referido em [12]), dadas funções $f, h \in C^\infty(M)$, tem-se, pelo lema 1.2.35, que

$$\{f, h\} \circ \Psi_g = \{f \circ \Psi_g, h \circ \Psi_g\}, \quad \forall g \in G,$$

de onde resulta a implicação

$$f, h \ G\text{-invariantes} \implies \{f, h\} \ G\text{-invariante}.$$

Considere-se agora uma função G-invariante $f \in C^\infty(M)$ e B como definido no capítulo 1 para o caso simplético, isto é,

$$B_p = T_p\mathcal{O}_p, \quad \forall p \in N.$$

Dado $p \in N$, como os elementos de $T_p\mathcal{O}_p$ são da forma $\dot{\Psi}(\xi)(p)$, com $\xi \in \mathcal{G}$, tem-se, para todo $\xi \in \mathcal{G}$, que

$$df_p\left(\dot{\Psi}(\xi)(p)\right) = \left.\frac{d\left(f \circ \Psi_{exp(-t\xi)}(p)\right)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(f(p))}{dt}\right|_{t=0} = 0,$$

de onde se conclui que

$$f \ G\text{-invariante} \implies f \ B\text{-invariante}.$$

Por outro lado, considere-se uma função $f \in C^\infty(M)_B$. Então, dado $p \in N$, sabemos que

$$df_p\left(\dot{\Psi}(\xi)(p)\right) = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{G},$$

ou seja,

$$\left.\frac{d\left(f \circ \Psi_{exp(-t\xi)}(p)\right)}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{G}.$$

Contudo, tal não implica, necessariamente, que f seja G-invariante, já que a igualdade acima apenas é válida em pontos p de N, não de M.

Vejamos o seguinte exemplo: considere-se a variedade diferenciável $\mathbb{R}^2$ com sistema de coordenadas cartesianas (globais) $\{x, y\}$ e seja $\omega = dx \wedge dy$ a forma simplética canónica em $\mathbb{R}^2$. Considere-se agora o grupo de Lie $(\mathbb{R}, +)$, cuja álgebra de Lie é $\mathbb{R}$. Como o grupo é abeliano, a ação co-adjunta é a identidade em $\mathbb{R}^*$, e como tem dimensão 1, o parêntesis de Lie em $\mathbb{R}$ é nulo. A aplicação exponencial em $\mathbb{R}$ é, também, a identidade. Considere-se a ação Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \Psi : (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow (\mathrm{Simp}(\mathbb{R}^2), \circ) \\ a &\longmapsto \Psi_a \end{aligned}$$

dada por

$$\Psi_a(x, y) = (x + a, y + a),$$

com co-momento $J : \mathbb{R} \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2)$ dado por

$$J(\xi)(x, y) = \xi(y - x)$$

e momento $\mu : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mu(x, y) = y - x.$$

Como $d\mu = -dx + dy$, todos os valores de $\mathbb{R}$ são regulares. Assim, considere-se a subvariedade mergulhada $N = \mu^{-1}(0)$, isto é,

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}.$$

Como o subgrupo de isotropia do valor regular 0 pela ação co-adjunta é $\mathbb{R}$ e como claramente Ψ atua de forma livre e própria sobre N, estão então reunidas as condições para o Teorema da Redução de Marsden & Weinstein ser aplicado. Considere-se agora a função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$f(x, y) = x(x - y).$$

Então,

- f não é G-invariante, uma vez que, dado $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se tem
$$f \circ \Psi_a(1,0) = 1 + a \neq 1 = f(1,0);$$
- f é B-invariante, uma vez que
$$B_p = T_p\mathcal{O}_p = \left\{ \dot{\Psi}(\xi)(p) : \xi \in \mathbb{R} \right\}, \quad \forall p \in N,$$
de onde resulta, dado $p = (x,x) \in N$ qualquer, que
$$\begin{aligned} df_p\left(\dot{\Psi}(\xi)(p)\right) &= \left.\frac{d\left(f \circ \Psi_{exp(-t\xi)}(p)\right)}{dt}\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d\left(f(x - t\xi, x - t\xi)\right)}{dt}\right|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

ficando assim concluído o argumento.

Outra consideração a ter em conta é a de que, embora tenhamos incluído nos preliminares da prova do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu os lemas 2.2.3 e 2.2.5, tais resultados ficaram implícitos na prova feita pelos autores em [12] sem nunca serem referenciados. De notar que o livro de Ortega e Ratiu que estamos a usar como referência para tais resultados foi publicado apenas em 2004, ao passo que o artigo da Redução de Marsden & Ratiu remonta a 1986.

No artigo [4] de Falceto e Zambon, que será objeto de estudo no capítulo seguinte, os autores apresentam uma demonstração alternativa, embora com pormenores omissos, do lema 2.2.3, todavia nada dizem relativamente ao resultado do lema 2.2.5, apesar de o usarem com frequência. De notar que o livro de Ortega e Ratiu ([15]) se encontra nas referências bibliográficas desse mesmo artigo.

2.5 Caso particular: redução simplética com simetrias

Tal como se lê no artigo [12] de Marsden e Ratiu, uma das motivações por trás da formulação do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu para variedades de Poisson foi a de generalizar o conceito de redução simplética com simetrias, apresentada em [13] por Marsden e Weinstein em 1974. No exemplo B ([12], pág. 165), os autores afirmam que esse tipo de redução é, de facto, um caso particular da redução de Poisson estabelecida no artigo.

As duas primeiras subsecções desta secção serão dedicadas a provar tal afirmação, com todos os detalhes omissos em [12]. Para tal, será necessário mostrar não só que estamos nas condições necessárias ao uso do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu (para garantirmos que a variedade é Poisson-redutível) como também que a estrutura simplética e de Poisson reduzidas obtidas usando os dois teoremas estão relacionadas da forma habitual.

Na última subsecção faremos a verificação das condições do Teorema da Redução da Dinâmica de Marsden & Ratiu para finalizar a comparação entre os dois trabalhos.

2.5.1 Verificação das condições do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu

Comecemos por estabelecer o paralelismo entre as duas visões. Nas hipóteses e notação definidas na secção 1.3, considerem-se as seguintes condições:

1. (M, ω): variedade simplética conexa, com estrutura de Poisson $\{\ ,\ \}$ determinada por ω como na definição 1.1.6;

2. $(G, .)$: grupo de Lie (conexo);

3. Ψ: ação (à esquerda) Hamiltoniana de G em M;

4. $N = \mu^{-1}(x) \neq \emptyset$: subvariedade mergulhada de M, com x valor regular de μ;

5. $G_x = \{g \in G : Ad*_g(x) = x\}$: subgrupo de isotropia de x pela ação $Ad*$, com ação (restrição de Ψ a G_x) livre e própria sobre N. Assim, N/G_x tem estrutura de variedade diferenciável para a qual π é uma submersão sobrejetiva;

6. $B \subseteq T_N M$ definido, ponto a ponto, por
$$B_p = T_p \mathcal{O}_p, \quad \forall p \in N;$$

7. $F = B \cap TN$.

Vamos então verificar que estamos nas condições do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu.

- B é um subfibrado de TM restrito a pontos de N:

  Dado $p \in N$, B_p é o espaço tangente à órbita de p pela ação Ψ que, pela proposição 1.2.20, tem estrutura de variedade diferenciável. Assim, para garantirmos que B é um subfibrado, basta ver que tem característica constante. Para tal, recorreremos ao seguinte resultado, presente em qualquer livro de geometria simplética:

Proposição 2.5.1. *Dado um espaço vetorial simplético* (V,ω) *e* $S \subseteq V$ *um subespaço vetorial de* V*, tem-se*

$$dim(S) + dim(S^\omega) = dim(V),$$

onde S^ω *representa o complemento simplético de* S*.*

Dado $p \in N$, considere-se o espaço vetorial simplético (T_pM, ω_p) e T_pN, subespaço vetorial de T_pM. Pelo lema 1.3.2, sabemos que

$$(T_pN)^{\omega_p} = T_p\mathcal{O}_p.$$

Aplicando a proposição 2.5.1, tem-se

$$\dim(T_pN) + \dim(B_p) = \dim(T_pM).$$

Como TM e TN têm característica constante por serem fibrados vetoriais, conclui-se que B também terá, ficando assim provado que B é um subfibrado de T_NM.

- F é uma distribuição integrável regular em N:

Pelo lema 1.3.2, tem-se

$$F_p = T_p\mathcal{O}_p \cap T_pN = T_p\mathcal{O}_p^x, \quad \forall p \in N$$

e, atendendo à nota 1.3.1, tem-se

$$p \in N, g \in G_x \implies \Psi_g(p) \in N.$$

Mais ainda, se $p \in N$ e $\Psi_g(p) \in N$, tem-se também

$$x = \mu(\Psi_g(p)) = Ad*_g(\mu(p)) = Ad*_g(x),$$

de onde resulta, qualquer que seja $p \in N$, que

$$g \in G_x \iff \Psi_g(p) \in N,$$

ou seja, as órbitas de pontos de N pelo subgrupo de Lie G_x são da forma

$$\mathcal{O}_p^x = N \cap \mathcal{O}_p.$$

Como $M_x = N/G_x$ tem estrutura de variedade diferenciável para a qual a projeção canónica

$$\pi : N \longrightarrow M_x$$

é uma submersão, as órbitas $\mathcal{O}_p^x$ serão subvariedades mergulhadas de N, todas da mesma dimensão, uma vez que se trata de imagens inversas de valores regulares. Considerando o grupo de Lie G_x e a ação restrita a G_x, o conjunto das componentes conexas das órbitas $\mathcal{O}_p^x$, com $p \in N$, forma uma folheação de N, definida pela distribuição integrável F, como se pode confirmar em [9] (apêndice 5, pág. 423, nota 3.12). Como as componentes conexas são abertos de $\mathcal{O}_p^x$, têm a mesma dimensão de $\mathcal{O}_p^x$, logo a distribuição F é regular e tem-se $M_x = N/F = \overline{N}$.

- $\overline{N} = N/F$ admite uma estrutura de variedade diferenciável para a qual a projeção canónica é uma submersão:

  Como, pelo ponto anterior, se tem $M_x = N/F = \overline{N}$, a existência de uma tal estrutura fica garantida pela condição da ação Ψ restrita a G_x atuar de forma livre e própria sobre N. De notar que, ao contrário do que acontece no Teorema da Redução de Marsden & Ratiu, nada estamos a assumir em relação à folheação induzida por F no que toca a regularidade. Tal facto não contradiz o objetivo a que nos propusemos nesta secção uma vez que a condição imposta em [12] relativamente à folheação apenas tem o propósito de garantir que N/F admite tal estrutura.

- $\#B^0 \subseteq TN + B$:

  Dado $p \in N$, tem-se

$$
\begin{aligned}
B_p &= T_p\mathcal{O}_p = \left\{ \dot{\Psi}(\xi)(p) : \xi \in \mathcal{G} \right\} \\
B_p^0 &= \left\{ \alpha_p \in T_p^*M : \langle \alpha_p, u \rangle = 0, \forall u \in B_p \right\}
\end{aligned}
$$

  Assim, tendo em conta que $\omega^\flat$ e $P^\#$ são isomorfismos inversos, dada $\alpha_p \in B_p^0$ arbitrária, tem-se

$$
\begin{aligned}
\left\langle \alpha_p, \dot{\Psi}(\xi)(p) \right\rangle = 0, \forall \xi \in \mathcal{G} &\iff \omega_p\left(\dot{\Psi}(\xi)(p), \#\alpha_p \right) = 0, \forall \xi \in \mathcal{G} \\
&\iff \#\alpha_p \in (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p} = T_pN,
\end{aligned}
$$

  de onde se conclui que

$$
\#B_p^0 = T_pN.
$$

  Como $p \in N$ é arbitrário, conclui-se que

$$
\#B^0 = TN \subseteq TN + B,
$$

  e assim a condição (2.3) do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu é verificada.

  Por outro lado, dado $p \in N$, considere-se $\dot{\Psi}(\xi)(p) \in B_p$. Como

$$
(T_pN)^{\omega_p} = T_p\mathcal{O}_p,
$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\omega_p\left(u, \dot{\Psi}(\xi)(p)\right) = 0, \forall u \in T_pN &\iff \omega_p^\flat\left(\dot{\Psi}(\xi)\right)(u) = 0, \forall u \in T_pN \\
&\iff \omega_p^\flat\left(\dot{\Psi}(\xi)\right) \in (T_pN)^0 \\
&\iff \dot{\Psi}(\xi)(p) \in \#(T_pN)^0,
\end{aligned}$$

de onde se conclui que

$$\#(T_pN)^0 = B_p.$$

Como $p \in N$ é arbitrário, conclui-se também que

$$\#TN^0 = B,$$

facto que será necessário na prova do ponto seguinte.

- B é canónico:

  Vamos dividir o argumento em pequenos lemas, para uma melhor organização da prova.

Lema 2.5.2. *Seja $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson, $N \subseteq M$ uma subvariedade de M e $B \subseteq T_NM$ um subfibrado tal que*

$$\#B^0 = TN,$$

onde $\#$ representa o morfismo de Poisson associado a $\{\ ,\ \}$. Então, $f \in C^\infty(M)$ é B-invariante se e só se, para todo $p \in N$, se tem $X_f(p) \in T_pN$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
f \text{ é } B\text{-invariante} &\iff df_p \in B_p^0, \quad \forall p \in N \\
&\iff \#df_p = X_f(p) \in \#B_p^0 = T_pN, \quad \forall p \in N.
\end{aligned}$$

□

O próximo lema, bem como a sua demonstração, pode ser encontrado em [15] (pág. 5, lema 1.1.9) e vem trazer-nos uma caracterização específica, e útil, do anulador de T_pN.

Lema 2.5.3. *Seja M uma variedade diferenciável e $N \subseteq M$ uma subvariedade mergulhada de M. Então, para todo $p \in N$,*

$$(T_pN)^0 = \left\{dh_p : h \in C^\infty(M) \text{ com } h\big|_N = 0\right\}.$$

Lema 2.5.4. *Seja* $(M, \{\ ,\ \})$ *uma variedade de Poisson,* $N \subseteq M$ *uma subvariedade de* M *e* $B \subseteq T_N M$ *um subfibrado tal que*

$$\# TN^0 = B,$$

onde $\#$ *representa o morfismo de Poisson associado a* $\{\ ,\ \}$*. Então,* $f \in C^\infty(M)$ *é* B*-invariante se e só se, para todo* $h \in C^\infty(M)$ *com* $h\big|_N = 0$*, se tem* $\{f, h\}|_N = 0$*.*

Demonstração. Dado $p \in N$, o lema 2.5.3 garante que

$$(T_p N)^0 = \left\{ dh_p : h \in C^\infty(M) \text{ com } h\big|_N = 0 \right\}.$$

Assim,

$$B_p = \#(T_p N)^0 = \left\{ \# dh_p = X_h(p) : dh_p \in (T_p N)^0 \right\}.$$

Seja $f \in C^\infty(M)$. Então,

$$\begin{aligned} f \text{ é } B\text{-invariante} &\iff df_p(X_h(p)) = 0, \quad \forall p \in N, \forall X_h(p) \in B_p \\ &\iff \{h, f\}\big|_N = 0, \quad \forall h \in C^\infty(M) \text{ com } h\big|_N = 0, \end{aligned}$$

de onde resulta a equivalência pretendida. □

Por fim, temos que:

Lema 2.5.5. B*, como definido no ponto 6 das condições apresentadas no início desta subsecção, é canónico.*

Demonstração. Sejam $f, g \in C^\infty(M)_B$. Então, a identidade de Jacobi da estrutura de Poisson em M garante que

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \quad \forall h \in C^\infty(M).$$

Em particular, considere-se $h \in C^\infty(M)$, arbitrária, satisfazendo

$$h\big|_N = 0.$$

Pelo lema 2.5.4, sabemos que

$$\{g, h\}\big|_N = \{h, f\}\big|_N = 0,$$

de onde resulta que, para todo $p \in N$, as diferenciais de $\{g, h\}$ e $\{h, f\}$ se anulam em $T_p N$. Assim, como o lema 2.5.2 garante que $X_f(p)$ e $X_g(p)$ estão em $T_p N$ para todo $p \in N$, tem-se

$$d(\{g, h\})_p(X_f(p)) = d(\{h, f\})_p(X_g(p)) = 0, \quad \forall p \in N.$$

Assim, usando a identidade de Jacobi, concluímos que, qualquer que seja $p \in N$,

$$\begin{aligned} & \{f,\{g,h\}\}(p)+\{g,\{h,f\}\}(p)+\{h,\{f,g\}\}(p)=0 \\ \Longleftrightarrow\ & d(\{g,h\})_p(X_f(p))+d(\{h,f\})_p(X_g(p))+\{h,\{f,g\}\}(p)=0 \\ \Longleftrightarrow\ & \{h,\{f,g\}\}(p)=0. \end{aligned}$$

Conclui-se assim que

$$\{\{f,g\},h\}\big|_N=0, \quad \forall h \in C^\infty(M) \text{ com } h\big|_N=0,$$

de onde resulta, usando o lema 2.5.4, a B-invariância de $\{f,g\}$. □

Ficam assim verificadas todas as condições que permitem usar o Teorema da Redução de Marsden & Ratiu para garantir que o quarteto (M,ω,N,B) é Poisson-redutível.

2.5.2 Comparação das estruturas reduzidas

Vamos agora ver que a estrutura de Poisson em $M_x=\overline{N}$ obtida da estrutura simplética reduzida (dada pelo Teorema da Redução de Marsden & Weinstein) coincide com a do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu, isto é, que

$$\{f,g\}_{\overline{N}}=\omega^x(X_f,X_g)$$

para todas as funções $f,g \in C^\infty(\overline{N})$.

Considere-se a projeção canónica

$$\pi : N \longrightarrow \overline{N},$$

que sabemos ser uma submersão sobrejetiva. Considerem-se $f,g \in C^\infty(\overline{N})$ e $f^B,g^B \in C^\infty(M)_B$ extensões (B-invariantes) a M de $f\circ\pi$ e $g\circ\pi$, respetivamente.

Lema 2.5.6. *Nas condições 1 a 6 apresentadas no início da subsecção 2.5.1, seja $p \in N$ e $[p]=\pi(p) \in \overline{N}$. Então, para todo $h \in C^\infty(\overline{N})$ e $h^B \in C^\infty(M)_B$ extensão (B-invariante) a M de $h\circ\pi$, tem-se*

$$X_h([p])=d\pi_p(X_{h^B}(p)),$$

onde X_{h^B} é o campo Hamiltoniano de h^B em M associado à estrutura simplética ω e X_h é o campo Hamiltoniano de h em $\overline{N}$ associado à estrutura simplética ω^x.

Demonstração. Dado $p \in N$, seja $[u] = d\pi_p(u) \in T_{[p]}\overline{N}$, onde $u \in T_pN$. Uma vez que π é uma submersão, todos os elementos de $T_{[p]}\overline{N}$ são desta forma. Como o lema 2.5.2 nos garante que $X_{h^B}(p) \in T_pN$, $d\pi_p(X_{h^B}(p))$ está bem-definido. Tendo em conta que

$$X_h([p]) = d\pi_p(X_{h^B}(p)) \iff \omega^x_{[p]}([u], d\pi_p(X_{h^B}(p))) = dh_{[p]}([u]), \forall u \in T_pN,$$

podemos provar o lado direito da equivalência para obter o pretendido. Dado $u \in T_pN$, recorrendo à redução simplética dada pelo Teorema da Redução de Marsden & Weinstein e ao facto de $X_{h^B}(p)$ pertencer a T_pN, tem-se

$$\begin{aligned}
\omega^x_{[p]}([u], d\pi_p(X_{h^B}(p))) &= \omega^x_{[p]}(d\pi_p(u), d\pi_p(X_{h^B}(p))) \\
&= (\pi^*\omega^x)_p(u, X_{h^B}(p)) \\
&= (i^*\omega)_p(u, X_{h^B}(p)) \\
&= \omega_p(u, X_{h^B}(p)) \\
&= d(h^B)_p(u) \\
&= i^*d(h^B)_p(u) \\
&= d(i^*h^B)_p(u) \\
&= d(h \circ \pi)_p(u) \\
&= dh_{[p]}(d\pi_p(u)) = dh_{[p]}([u]),
\end{aligned}$$

pelo que se conclui assim a prova. □

Apenas falta ver agora que, de facto, as estruturas reduzidas obtidas em ambos os teoremas estão relacionadas da forma usual. Seja $p \in N$. Então, recorrendo ao lema 2.5.6, tem-se

$$\begin{aligned}
\{f, g\}_{\overline{N}}([p]) &= \left\{f^B, g^B\right\}(p) \\
&= \omega_p(X_{f^B}(p), X_{g^B}(p)) \\
&= \omega^x_{[p]}(d\pi_p(X_{f^B}(p)), d\pi_p(X_{g^B}(p))) \\
&= \omega^x_{[p]}(X_f([p]), X_g([p])),
\end{aligned}$$

ficando assim provado o pretendido.

2.5.3 Verificação das condições do Teorema da Redução da Dinâmica de Marsden & Ratiu

Nesta subsecção vamos verificar que as condições do Teorema da Redução da Dinâmica de Marsden & Weinstein garantem as condições do Teorema da Redução da Dinâmica de Marsden & Ratiu, concluíndo-se assim que se trata, mais uma vez, de um caso particular do mesmo, como aconteceu nas subsecções anteriores relativamente ao Teorema da Redução.

Nas condições 1 a 7 apresentadas no início da subsecção 2.5.1, considere-se uma função G-invariante $H \in C^\infty(M)$ e seja σ_t o fluxo do campo Hamiltoniano $X_H \in \mathcal{X}(M)$.

- H é B-invariante:

  Uma vez que H é uma função G-invariante, ficou provado na secção 2.4 que tal implica a B-invariância de H.

- σ_t é uma aplicação de Poisson:

  Como X_H é, em particular, um campo simplético, a proposição 1.1.5 garante que σ_t é um simplectomorfismo de M. Assim, recorrendo ao lema 1.2.35 conclui-se o pretendido.

- $\sigma_t(N) \subseteq N$:

  É garantido pelo lema 1.5.1.

- $(d\sigma_t)(B) \subseteq B$:

  Dados $p \in N$ e $u \in B_p$, sabemos que existe $\xi \in \mathcal{G}$ tal que

$$u = \dot{\Psi}(\xi)(p) = \left.\frac{d\left(\Psi_{exp(-t\xi)}(p)\right)}{dt}\right|_{t=0}.$$

  Assim, como o lema 1.5.1 garante que σ_t comuta com Ψ, tem-se

$$\begin{aligned}(d\sigma_s)_p(u) &= \left.\frac{d\left(\sigma_s \circ \Psi_{exp(-t\xi)}(p)\right)}{dt}\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d\left(\Psi_{exp(-t\xi)}(\sigma_s(p))\right)}{dt}\right|_{t=0} \\ &= \dot{\Psi}(\xi)(\sigma_s(p)) \in B_{\sigma_s(p)},\end{aligned}$$

  de onde resulta o pretendido.

Como todas as condições necessárias ao uso do Teorema da Redução da Dinâmica de Marsden & Ratiu foram verificadas, fica assim provado que o Teorema da Redução da Dinâmica de Marsden & Weinstein é, de facto, um caso particular deste.

O Hamiltoniano reduzido, bem como o fluxo do campo que lhe está associado, são obtidos a partir do Hamiltoniano e do fluxo em M da mesma forma em ambos os teoremas, pelo que não há nada a provar em relação a essa comparação.

Capítulo 3

Uma extensão do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu

Neste capítulo vamos estudar o teorema da redução de variedades de Poisson formulado por Falceto e Zambon em [4], que nada mais é do que uma extensão do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu visto anteriormente e que denominaremos por Extensão do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu por Falceto & Zambon ou, simplesmente, por Teorema da Redução de Falceto & Zambon. Na notação do capítulo 2, a premissa dos autores é a de que a condição da canonicidade do subfibrado B é demasiado forte e que pode ser relaxada, permitindo que a redução de variedades de Poisson usando distribuições possa ser aplicada a um maior leque de situações.

Além do Teorema da Redução de Falceto & Zambon referido acima, iremos estudar, no final deste capítulo, alguns exemplos de variedades Poisson-redutíveis com subfibrado B não canónico mas, para já, comecemos por revisitar o Teorema da Redução de Marsden & Ratiu sob um novo ponto de vista.

3.1 Teorema da Redução de Marsden & Ratiu revisitado

Comecemos por estipular as condições em que nos devemos encontrar para revisitar o Teorema da Redução de Marsden & Ratiu:

1. $(M, \{\ ,\ \})$: variedade de Poisson;
2. $N \subseteq M$: subvariedade mergulhada de M, com mergulho dado pela inclusão
$$i : N \hookrightarrow M;$$
3. $B \subseteq T_N M$: subfibrado de TM restrito a N;

4. $F = B \cap TN$: distribuição integrável regular em N;

5. $\overline{N} = N/F$: variedade diferenciável para a qual a projeção canónica

$$\pi : N \longrightarrow \overline{N}$$

é uma submersão.

De notar que Falceto e Zambon assumem a última condição não impondo, contudo, nenhuma condição relativamente à folheação de N induzida por F, como se pode ler em [4] (secção 2, pág. 204).

Recordando agora a definição 2.2.1, dado um subfibrado $B \subseteq T_N M$, definiu-se o conjunto das funções B-invariantes em M por

$$C^\infty(M)_B = \{f \in C^\infty(M) : df_p(u) = 0, \forall p \in N, \forall u \in B_p\}.$$

De forma análoga, dado $F = B \cap TN$, podemos definir o conjunto das funções F-invariantes em M e N, respetivamente, por

$$C^\infty(M)_F = \{f \in C^\infty(M) : df_p(u) = 0, \forall p \in N, \forall u \in F_p\}$$

e

$$C^\infty(N)_F = \{f \in C^\infty(N) : df_p(u) = 0, \forall p \in N, \forall u \in F_p\}.$$

Considerando o isomorfismo

$$\begin{aligned} C^\infty(\overline{N}) &\longrightarrow C^\infty(N)_F \\ f &\longmapsto f \circ \pi \end{aligned}$$

conclui-se que

$$C^\infty(\overline{N}) \cong C^\infty(N)_F.$$

De seguida apresentamos um lema, provado em [4] (pág. 204, lema 2.1), que vem reformular o lema 2.2.3.

Lema 3.1.1. *Nas condições 1 a 5 acima descritas, existe sempre um subconjunto aberto $M' \subseteq M$ que contém N e é tal que qualquer função F-invariante em N pode ser estendida a uma função B-invariante em M'.*

Nota 3.1.2. *O subconjunto $M' \subseteq M$ do lema anterior é, na realidade, uma vizinhança tubular de N. Como o parêntesis de Poisson é uma operação local, a escolha de tal vizinhança não tem uma relevância concreta. Por isso, numa tentativa de simplificar notação, assumiremos que M tem a propriedade acima descrita, ou seja, $M' = M$.*

Lembremos agora que, pelo Teorema da Redução de Marsden & Ratiu, se B for canónico, $(M, \{\ ,\ \}, N, B)$ é Poisson-redutível se e só se

$$\#B^0 \subseteq TN + B. \tag{3.1}$$

O lema seguinte é uma adaptação de um lema formulado e provado por Falceto e Zambon em [4] (pág. 206, lema 2.2), onde os autores estabelecem uma relação entre a canonicidade de B e a condição (3.1). Devido a uma aparente pequena incongruência nos argumentos utilizados na prova presente em [4], sentimos necessidade de fazer uma ligeira reformulação, quer do enunciado, quer da sua demonstração.

Lema 3.1.3. *Seja $B \subseteq T_N M$ um subfibrado canónico. Se $B \neq 0$, então $\# B^0 \subseteq TN$.*

Demonstração. Seja $B \subseteq T_N M$ um subfibrado canónico não nulo e suponhamos que $\# B^0 \nsubseteq TN$. Então, existe algum $p \in N$ para o qual

$$\# B_p^0 \nsubseteq T_p N.$$

Mas $\# B_p^0 \nsubseteq T_p N$ equivale a dizer que existe $\alpha_p \in B_p^0$ tal que

$$\# \alpha_p \notin T_p N.$$

Seja $\alpha_p \in B_p^0$ nessas condições e considere-se $h \in C^\infty(M)_B$ tal que

$$\alpha_p = dh_p,$$

cuja existência é garantida pelo lema 2.2.5. Recordando o lema A.0.16, uma vez que

$$\operatorname{Ker}\left((T_p N)^0\right) = T_p N,$$

existe $\beta_p \in (T_p N)^0$ tal que

$$\langle \beta_p, \# \alpha_p \rangle \neq 0.$$

Recorrendo agora ao lema 2.5.3,

$$\beta_p = dg_p$$

para alguma função $g \in C^\infty(M)$ com $g|_N = 0$. Então, tem-se

$$\{h, g\}(p) = \langle dg_p, \# dh_p \rangle = \langle \beta_p, \# \alpha_p \rangle \neq 0.$$

Note-se agora que g^2 é B-invariante, pois

$$d(g^2)_q(u) = 2g(q) dg_q(u) = 0, \quad \forall q \in N, \forall u \in B_q,$$

uma vez que $g|_N = 0$. Então, como B é canónico, tem-se

$$\left\{h, g^2\right\} \in C^\infty(M)_B.$$

Pela regra de Leibniz, obtém-se

$$\left\{h, g^2\right\} = g\{h, g\} + \{h, g\} g,$$

de onde resulta, dados $q \in N$ e $u \in B_q$ quaisquer, que

$$\begin{aligned}
0 &= d\left(\{h, g^2\}\right)_q(u) \\
&= d\left(g\{h,g\} + \{h,g\}g\right)_q(u) \\
&= 2\left(\{h,g\}(q)dg_q(u) + g(q)d(\{h,g\})_q(u)\right) \\
&= 2\{h,g\}(q)dg_q(u).
\end{aligned}$$

Em particular, como $\{h,g\}(p) \neq 0$, estamos perante um de dois cenários possíveis[1]:

- ou $\#dh_p \in B_p$ e, nesse caso, obtém-se uma contradição (concluíndo a prova), uma vez que, tomando $q = p$ e $u = \#dh_p$, se tem

$$\{h,g\}(p)\langle dg_p, \#dh_p\rangle = (\{h,g\}(p))^2 \neq 0;$$

- ou $\#dh_p \notin B_p$ e, nesse caso, conclui-se que

$$dg_p(u) = 0, \quad \forall u \in B_p. \tag{3.2}$$

Assumindo que $\#dh_p \notin B_p$, considere-se agora uma função $g' \in C^\infty(M)$ arbitrária com $g'|_N = 0$. Como

$$d(gg')_q(u) = g'(q)dg_q(u) + g(q)dg'_q(u) = 0, \quad \forall q \in N, \forall u \in B_q,$$

conclui-se que gg' também é B-invariante. Como B é canónico, recorrendo novamente à regra de Leibniz e ao facto de que $g|_N = g'|_N = 0$, tem-se, para todo $q \in N$ e $u \in B_q$, que

$$\begin{aligned}
0 &= d\left(\{h, gg'\}\right)_q(u) \\
&= d\left(g\{h,g'\} + \{h,g\}g'\right)_q(u) \\
&= \{h,g'\}(q)dg_q(u) + \{h,g\}(q)dg'_q(u).
\end{aligned}$$

Em particular, atendendo à condição (3.2) e uma vez que $\{h,g\}(p) \neq 0$, conclui-se que

$$dg'_p(u) = 0, \quad \forall u \in B_p.$$

Como $g' \in C^\infty(M)$ com $g'|_N = 0$ é arbitrária, recorrendo novamente aos lemas 2.5.3 e A.0.16 conclui-se que

$$B_p \subseteq T_pN.$$

Agora, como $F = B \cap TN$, em particular tem-se

$$F_p = B_p \cap T_pN = B_p.$$

[1] A constatação da existência destes dois cenários está omissa na prova presente em [4] mas é, de facto, necessária para o argumento.

Assim, e uma vez que B é um subfibrado e $F \subseteq B$ é uma distribuição regular, dado $q \in N$ qualquer, tem-se

$$\dim(F_q) = \dim(F_p) = \dim(B_p) = \dim(B_q).$$

Além disso, como $F_q \subseteq B_q$, qualquer que seja $q \in N$, conclui-se que

$$B = F \subseteq TN.$$

Tal implica que g é, na realidade, uma função B-invariante, uma vez que $g|_N = 0$ e $B \subseteq TN$.

Considere-se agora $f \in C^\infty(M)$ arbitrária. Do facto de g ser uma função B-invariante e $g|_N = 0$ resulta que gf é, também, uma função B-invariante, uma vez que, dados $q \in N$ e $u \in B_q \subseteq T_qN$ quaisquer, se tem

$$d\left(gf\right)_q(u) = f(q)dg_q(u) + g(q)df_q(u) = 0.$$

Assim, como B é canónico e $g|_N = 0$, tem-se, para todo $q \in N$ e $u \in B_q$, que

$$\begin{aligned} 0 &= d\left(\{h, gf\}\right)_q(u) \\ &= d\left(g\{h, f\} + \{h, g\}f\right)_q(u) \\ &= g(q)d\left(\{h, f\}\right)_q(u) + \{h, f\}(q)dg_q(u) + \{h, g\}(q)df_q(u) + f(q)d\left(\{h, g\}\right)_q(u) \\ &= \{h, g\}(q)df_q(u). \end{aligned}$$

Em particular, como $\{h, g\}(p) \neq 0$, tem-se que

$$df_p(u) = 0, \quad \forall u \in B_p,$$

isto é,

$$df_p \in B_p^0.$$

Como $f \in C^\infty(M)$ é arbitrária e

$$T_p^*M = \{df_p : f \in C^\infty(M)\},$$

tem-se

$$B_p^0 = T_p^*M,$$

o que implica, recorrendo ao lema A.0.16, que

$$B_p = \mathrm{Ker}\left(B_p^0\right) = \mathrm{Ker}\left(T_p^*M\right) = 0.$$

Como B é um subfibrado, tem dimensão constante em todos os pontos de N, logo

$$B = 0,$$

ficando assim concluída a prova. $\square$

O teorema que se segue encontra-se em [4] (pág. 206, teorema 2.2) e vem dar-nos uma nova perspectiva do resultado formulado por Marsden e Ratiu em [12].

Teorema 3.1.4. *Nas condições 1 a 5 acima descritas e assumindo B canónico,*

- *se $B \neq 0$, então $(M, \{\ ,\ \}, N, B)$ é Poisson-redutível;*
- *se $B = 0$, $(M, \{\ ,\ \}, N, B)$ é Poisson-redutível se e só se N é uma subvariedade de Poisson.*

Demonstração. Se $B \neq 0$, o lema 3.1.3 garante que $\#B^0 \subseteq TN$, logo a condição

$$\#B^0 \subseteq TN + B$$

do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu é verificada, de onde se conclui que $(M, \{\ ,\ \}, N, B)$ é Poisson-redutível.

Suponha-se agora que $B = 0$. Pelo lema 2.1.28, N é uma subvariedade de Poisson se e só se $\#(T_p^*M) \subseteq T_pN$, para todo $p \in N$. Como $B = 0$, tem-se

$$B_p^0 = T_p^*M, \quad \forall p \in N,$$

logo

$$\#(T_p^*M) = \#B_p^0, \quad \forall p \in N.$$

Assim se conclui que N é uma subvariedade de Poisson se e só se

$$\#B^0 \subseteq TN = TN + B$$

de onde, recorrendo novamente ao Teorema da Redução de Marsden & Ratiu, se obtém o pretendido. $\square$

De notar que o segundo ponto do teorema anterior é bastante intuitivo uma vez que, caso B seja o subfibrado nulo de T_NM, se tem

$$\overline{N} = N/(B \cap TN) \cong N,$$

caso em que a estrutura de Poisson em $\overline{N}$ coincide com a de N.

A proposição que se segue garante que, quando existe, a estrutura de Poisson em $\overline{N}$ não depende da escolha do subfibrado B mas sim da distribuição integrável F. Tal proposição pode ser encontrada em [4] (pág. 207, proposição 2.1) e vem confirmar a ideia de que a escolha do subfibrado B não tem um papel tão relevante para o resultado como inicialmente aparentava.

Proposição 3.1.5. *Nas condições 1 a 5 acima descritas, se $B_1, B_2 \subseteq T_N M$ são dois subfibrados canónicos não nulos tais que*

$$B_1 \cap TN = B_2 \cap TN,$$

então as estruturas de Poisson induzidas em

$$\overline{N} = N/(B_1 \cap TN) = N/(B_2 \cap TN)$$

por B_1 e B_2 coincidem.

Demonstração. Considerem-se funções $f, g \in C^\infty(\overline{N})$ e $f^{B_1}, g^{B_1} \in C^\infty(M)_{B_1}$ e $f^{B_2}, g^{B_2} \in C^\infty(M)_{B_2}$ extensões a M de, respetivamente, $f \circ \pi$ e $g \circ \pi$, isto é,

$$\begin{aligned} f^{B_1}\big|_N &= f^{B_2}\big|_N = f \circ \pi \\ g^{B_1}\big|_N &= g^{B_2}\big|_N = g \circ \pi, \end{aligned}$$

cuja existência é garantida pelo lema 2.2.3. Lembrando a igualdade

$$\pi^*\{f, g\}_{\overline{N}} = i^* \left\{f^{B_j}, g^{B_j}\right\}, \text{ com } j \in \{1, 2\},$$

com $f, g \in C^\infty(\overline{N})$ e $f^{B_j}, g^{B_j} \in C^\infty(M)_{B_j}$ extensões (B_j-invariantes) a M de, respetivamente, $f \circ \pi$ e $g \circ \pi$, para mostrarmos que as estruturas de Poisson induzidas por B_1 e B_2 coincidem, basta ver que

$$i^*\{f^{B_1}, g^{B_1}\} = i^*\{f^{B_2}, g^{B_2}\}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} i^*\{f^{B_1}, g^{B_1}\} - i^*\{f^{B_2}, g^{B_2}\} &= \\ &= i^*\{f^{B_1}, g^{B_1}\} - i^*\{f^{B_2}, g^{B_1}\} + i^*\{f^{B_2}, g^{B_1}\} - i^*\{f^{B_2}, g^{B_2}\} \\ &= i^*\{f^{B_1} - f^{B_2}, g^{B_1}\} + i^*\{f^{B_2}, g^{B_1} - g^{B_2}\}. \end{aligned}$$

Mas como $f^{B_1}\big|_N = f^{B_2}\big|_N$, tem-se

$$(f^{B_1} - f^{B_2})\big|_N = 0,$$

de onde resulta que

$$d(f^{B_1} - f^{B_2})_p(u) = 0, \quad \forall p \in N, \forall u \in T_p N,$$

isto é,

$$d(f^{B_1} - f^{B_2})_p \in (T_p N)^0, \quad \forall p \in N.$$

Por um lado, como $B_1 \neq 0$ e $B_2 \neq 0$, o lema 3.1.3 garante que

$$\#(B_i)^0 \subseteq TN, \text{ com } i \in \{1, 2\},$$

por outro lado, como $f^{B_1} \in C^\infty(M)_{B_1}$ e $f^{B_2} \in C^\infty(M)_{B_2}$, tem-se

$$df^{B_i} \in B_i^0, \text{ com } i \in \{1,2\},$$

de onde se conclui, para todo $p \in N$, que

$$\#(df^{B_i})_p \in \#(B_i)_p^0 \subseteq T_pN, \text{ com } i \in \{1,2\}.$$

Analogamente se retira a mesma conclusão para as funções g^{B_1} e g^{B_2}.

Agora, seja $p \in N$ qualquer. Então, como

$$d(f^{B_1} - f^{B_2})_p \in T_pN^0$$

e

$$\#(dg^{B_1})_p \in T_pN,$$

tem-se que

$$\begin{aligned} i^*\{f^{B_1} - f^{B_2}, g^{B_1}\}(p) &= \{f^{B_1} - f^{B_2}, g^{B_1}\}(p) \\ &= -\left\langle d(f^{B_1} - f^{B_2})_p, \#(dg^{B_1})_p \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

De forma análoga se conclui que

$$i^*\{f^{B_2}, g^{B_1} - g^{B_2}\}(p) = 0,$$

ficando assim concluída a prova. □

No caso em que $B_1 = 0$, não contemplado na proposição anterior, uma vez que B_1 é claramente canónico, o teorema 3.1.4 garante a existência de uma estrutura de Poisson em $\overline{N} = N/(B_1 \cap TN)$ se e só se N é uma subvariedade de Poisson.

Suponhamos então que N é uma subvariedade de Poisson e considere-se um subfibrado canónico não nulo $B_2 \subseteq T_NM$. Se $B_2 \cap TN = 0$, resulta dos argumentos usados na demonstração da proposição anterior que as estuturas de Poisson em $\overline{N} = N/(B_1 \cap TN) = N/(B_2 \cap TN)$ induzidas por B_1 e B_2 coincidem, uma vez que

$$\#(B_i)^0 \subseteq TN, \text{ com } i \in \{1,2\}.$$

Tal conclusão pode ser encontrada em [4] (pág. 207, nota 2.4).

3.2 Extensão do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu por Falceto & Zambon

Nesta secção vamos estudar uma extensão do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu formulada por Falceto e Zambon, onde a condição da canonicidade de B é relaxada, permitindo assim um maior leque de variedades

Poisson-redutíveis. Para tal, será necessário juntar um novo subfibrado às condições iniciais, bem como um subespaço especial de $C^\infty(M)_B$.

Recordando a prova do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu, verifica-se que, assumindo a condição

$$\#B^0 \subseteq TN + B,$$

existe um operador bilinear e antissimétrico

$$\{\ ,\ \}_{\overline{N}} : C^\infty(\overline{N}) \times C^\infty(\overline{N}) \longrightarrow \quad C^\infty(\overline{N})$$

definido por

$$\pi^*\{f, g\}_{\overline{N}} = i^*\{f^B, g^B\}, \tag{3.3}$$

com $f, g \in C^\infty(\overline{N})$ quaisquer e $f^B, g^B \in C^\infty(M)_B$ extensões arbitrárias (B-invariantes) a M de, respetivamente, $f \circ \pi$ e $g \circ \pi$, que satisfaz a regra de Leibniz em ambos os argumentos.

A verificação de que tal operador satisfaz também a identidade de Jacobi (para se concluir que define um parêntesis de Poisson em $\overline{N}$) é um dos poucos pontos da prova onde a canonicidade de B é realmente utilizada. Muito embora a questão da identidade de Jacobi fique resolvida de uma forma muito direta e prática, na verdade tal condição parece demasiado forte para o objetivo em questão.

Nota 3.2.1. *Embora na definição de Poisson-redutibilidade dada em 2.2.7 a canonicidade de B seja também assumida, na realidade esta aparenta ser, mais uma vez, uma condição demasiado forte para o propósito em questão. De notar que, atendendo à igualdade (3.3), $\{f, g\}_{\overline{N}}$ pertence a $C^\infty(\overline{N})$ se e só se $\{f^B, g^B\}$ for constante em cada folha da folheação de N definida por F. Assim, iremos substituir a condição da canonicidade de B por*

$$\{C^\infty(M)_B, C^\infty(M)_B\} \subseteq C^\infty(M)_F.$$

A partir de agora, e até ao final deste trabalho, quando nos referirmos à definição de Poisson-redutibilidade, estaremos a assumir esta alteração nas hipóteses iniciais, muito embora Falceto e Zambon não tenham imposto nenhuma delas na definição que enunciaram em [4] (pág. 205, definição 2.2).

Considere-se agora a inclusão

$$i : N \hookrightarrow M.$$

Recordando o lema 3.1.1 e a nota 3.1.2 podemos assumir, sem perda de generalidade, que a aplicação

$$i^* : C^\infty(M)_B \longrightarrow C^\infty(N)_F$$

é sobrejetiva, onde i^* representa a restrição a $C^\infty(M)_B$ do pullback pela inclusão, ou seja, é a aplicação que, para cada $f \in C^\infty(N)_F$ e cada extensão (B-invariante) $f^B \in C^\infty(M)_B$ a M de f, é dada através de

$$i^*(f^B) = f.$$

Assim, nestas condições, tem-se o teorema seguinte, presente em [4] (pág. 209, teorema 3.1):

Teorema 3.2.2 (Extensão do Teorema da Redução de Marsden & Ratiu por Falceto & Zambon)**.** *Seja $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson, $N \subseteq M$ uma subvariedade mergulhada de M e $B \subseteq T_N M$ um subfibrado tal que $F = B \cap TN$ é uma distribuição integrável regular em N. Considere-se um subfibrado $D \subseteq T_N M$ tal que $F \subseteq D \subseteq B$ e*

$$\#B^0 \subseteq D + TN. \tag{3.4}$$

Seja $\mathcal{B} \subseteq C^\infty(M)_B$ uma subálgebra multiplicativa para a qual a restrição a $\mathcal{B}$ de i^*, que denotaremos por

$$i^* : \mathcal{B} \longrightarrow C^\infty(N)_F,$$

é uma aplicação sobrejetiva. Se, além disso,

$$\{\mathcal{B}, \mathcal{B}\} \subseteq C^\infty(M)_D, \tag{3.5}$$

então $(M, \{\ ,\ \}, N, B)$ é Poisson-redutível.

Demonstração. Considere-se um subfibrado $D \subseteq T_N M$ e uma subálgebra multiplicativa $\mathcal{B}$ de $C^\infty(M)_B$ nas condições do enunciado do teorema. Sejam $f, g \in C^\infty(\overline{N})$ quaisquer e $f^B, g^B \in \mathcal{B}$ extensões (B-invariantes) a M de $f \circ \pi$ e $g \circ \pi$, respetivamente. Queremos provar que $\{\ ,\ \}_{\overline{N}}$ dado por

$$\pi^*\{f, g\}_{\overline{N}} = i^* \left\{f^B, g^B\right\}$$

define um parêntesis de Poisson em $\overline{N}$.

Comecemos por ver que este parêntesis não depende da escolha das extensões. Seja $f'^B \in \mathcal{B}$ uma outra extensão de $f \circ \pi$. Então, tem-se

$$d(f^B - f'^B) \in (B + TN)^0,$$

uma vez que f^B e f'^B são funções B-invariantes e coincidem em N, logo

$$(f^B - f'^B)\big|_N = 0.$$

Agora, por um lado, como $D \subseteq B$, tem-se

$$\begin{aligned} D + TN \subseteq B + TN &\implies (B + TN)^0 \subseteq (D + TN)^0 \\ &\implies \#(B + TN)^0 \subseteq \#(D + TN)^0, \end{aligned}$$

por outro lado, pela condição (3.4) do enunciado e recorrendo ao lema 2.1.20, tem-se

$$\#(D+TN)^0 \subseteq B,$$

de onde resulta que

$$\#(B+TN)^0 \subseteq B.$$

Assim, dado $p \in N$ qualquer, tem-se

$$i^* \left\{f^B - f'^B, g^B\right\}(p) = \left\langle \left(dg^B\right)_p, \#d\left(f^B - f'^B\right)_p \right\rangle = 0,$$

uma vez que g^B é B-invariante e

$$\#d\left(f^B - f'^B\right)_p \in B_p, \quad \forall p \in N.$$

Desta forma se conclui que o valor de $\pi^*\{f,g\}_{\overline{N}}$ não depende da escolha da extensão no primeiro argumento, estendendo-se tal propriedade ao segundo argumento por antissimetria do parêntesis de Poisson em M.

Vejamos agora que a função $\{f,g\}_{\overline{N}}$ está, de facto, em $C^\infty(\overline{N})$. Recordando a condição (3.5), como $F \subseteq D$, tem-se

$$\left\{f^B, g^B\right\} \in C^\infty(M)_D \subseteq C^\infty(M)_F,$$

de onde resulta que

$$\pi^*\{f,g\}_{\overline{N}} = i^*\left\{f^B, g^B\right\} \in C^\infty(N)_F \cong C^\infty(\overline{N}),$$

uma vez que $F \subseteq TN$.

Para terminar, falta provar que o parêntesis $\{\ ,\ \}_{\overline{N}}$ dado como acima define um parêntesis de Poisson em $\overline{N}$, ou seja, que é antissimétrico, $\mathbb{R}$-linear no 1º argumento e que satisfaz a regra de Leibniz e a identidade de Jacobi no 1º argumento.

- Antissimetria:

  Resulta da mesma propriedade em $\{\ ,\ \}$.

- $\mathbb{R}$-linearidade no 1º argumento:

  Sejam $f, g, h \in C^\infty(\overline{N})$ quaisquer e $f^B, g^B, h^B \in \mathcal{B}$ extensões (B-invariantes) a M de $f \circ \pi$, $g \circ \pi$ e $h \circ \pi$, respetivamente. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\pi^*\{af+bg,h\}_{\overline{N}} &= i^*\left\{af^B + bg^B, h^B\right\} \\
&= ai^*\left\{f^B, h^B\right\} + bi^*\left\{g^B, h^B\right\} \\
&= a\pi^*\{f,h\}_{\overline{N}} + b\pi^*\{g,h\}_{\overline{N}} \\
&= \pi^*\left(a\{f,h\}_{\overline{N}} + b\{g,h\}_{\overline{N}}\right),
\end{aligned}$$

  uma vez que $af^B + bg^B$ pertence a $\mathcal{B}$ (por $\mathcal{B}$ ser um subespaço vetorial de $C^\infty(M)_B$) e é uma extensão a M de $(af+bg) \circ \pi$.

- Regra de Leibniz no 1º argumento:

  A regra de Leibniz resulta da mesma propriedade em $\{\ ,\ \}$ e do facto de $\mathcal{B}$ ser uma subálgebra multiplicativa. De facto, dados $f, g, h \in C^\infty(\overline{N})$ quaisquer e $f^B, g^B, h^B \in \mathcal{B}$ extensões (B-invariantes) a M de $f \circ \pi$, $g \circ \pi$ e $h \circ \pi$, respetivamente, tem-se

$$\begin{aligned}\pi^*\{fg, h\}_{\overline{N}} &= i^*\left\{f^B g^B, h^B\right\} \\ &= i^*\left(f^B\left\{g^B, h^B\right\}\right) + i^*\left(\left\{f^B, h^B\right\} g^B\right) \\ &= (f \circ \pi)\left(\pi^*\{g, h\}_{\overline{N}}\right) + \left(\pi^*\{f, h\}_{\overline{N}}\right)(g \circ \pi) \\ &= \pi^*\left(f\{g, h\}_{\overline{N}} + \{f, h\}_{\overline{N}} g\right),\end{aligned}$$

  já que $f^B g^B$ pertence a $\mathcal{B}$ e é uma extensão (B-invariante) a M de $(fg) \circ \pi$.

- Identidade de Jacobi no 1º argumento:

  Seja $(\{f, g\}_{\overline{N}})^B \in \mathcal{B}$ uma extensão (B-invariante) a M de $\{f, g\}_{\overline{N}} \circ \pi$. Então, por definição, tem-se

$$\left(\{f, g\}_{\overline{N}}\right)^B \Big|_N = \left\{f^B, g^B\right\}\big|_N,$$

  de onde resulta que

$$d\left(\left\{f^B, g^B\right\} - \left(\{f, g\}_{\overline{N}}\right)^B\right) \in (D + TN)^0,$$

  uma vez que tanto $\left\{f^B, g^B\right\}$ como $\left(\{f, g\}_{\overline{N}}\right)^B$ são funções D-invariantes (pois $D \subseteq B$) e a sua diferença restrita a N é a função nula.

  Considerem-se agora $h \in C^\infty(\overline{N})$, $h^B \in \mathcal{B}$ extensão (B-invariante) de $h \circ \pi$ a M e $p \in N$ quaisquer. Então,

$$\begin{aligned}&i^*\left\{\left\{f^B, g^B\right\} - \left(\{f, g\}_{\overline{N}}\right)^B, h^B\right\}(p) = \\ &\quad = \left\langle \left(dh^B\right)_p, \# d\left(\left\{f^B, g^B\right\} - \left(\{f, g\}_{\overline{N}}\right)^B\right)_p \right\rangle = 0,\end{aligned} \tag{3.6}$$

  uma vez que

$$\# d\left(\left\{f^B, g^B\right\} - \left(\{f, g\}_{\overline{N}}\right)^B\right) \in \#(D + TN)^0 \subseteq B.$$

  Assim, recorrendo à condição (3.6) para justificar a segunda igualdade abaixo, tem-se

$$\pi^*\left\{\{f, g\}_{\overline{N}}, h\right\}_{\overline{N}} = i^*\left\{\left(\{f, g\}_{\overline{N}}\right)^B, h^B\right\} = i^*\left\{\left\{f^B, g^B\right\}, h^B\right\},$$

  de onde se conclui que a identidade de Jacobi em $\{\ ,\ \}_{\overline{N}}$ resulta da mesma propriedade em $\{\ ,\ \}$. $\square$

No caso particular em que $D = F$ e $\mathcal{B} = C^\infty(M)_B$, o teorema 3.2.2 dá-nos uma pequena melhoria relativamente ao Teorema da Redução de Marsden & Ratiu, onde a condição da canonicidade de B é enfraquecida:

Corolário 3.2.3. *Seja $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson, $N \subseteq M$ uma subvariedade mergulhada de M e $B \subseteq T_N M$ um subfibrado com $F = B \cap TN$ uma distribuição integrável regular em N. Se*

$$\{C^\infty(M)_B, C^\infty(M)_B\} \subseteq C^\infty(M)_F \tag{3.7}$$

e

$$\#B^0 \subseteq TN,$$

então $(M, \{\ ,\ \}, N, B)$ é Poisson-redutível.

Na prática, a condição (3.7) nem sempre é fácil de verificar. Como tal, apresentamos um lema que nos dá uma condição equivalente mais acessível para usar em exemplos. Contudo, antes de avançarmos para esse resultado, vamos necessitar de uma propriedade da derivada de Lie, dada pelo lema seguinte, que pode ser encontrado em [1] (pág. 87 e 88, teorema 2.2.17 e DO(4)), também referido por Falceto e Zambon em [4] (pág. 211, equação (4.5)) com uma notação mais próxima à usada neste trabalho.

Lema 3.2.4. *Seja $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson e P o tensor de Poisson correspondente. Dado $X \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$ quaisquer, tem-se*

$$(\mathcal{L}_X P)(df, dg) = X(\{f, g\}) - \{X(f), g\} - \{f, X(g)\},$$

onde $\mathcal{L}_X P$ representa a derivada de Lie (na direção de X) do 2-tensor P, como definido em A.0.10.

O enunciado do lema seguinte pode ser encontrado em [4] (pág. 210, nota 4.1), bem como dois dos ingredientes principais que o justificam.

Lema 3.2.5. *Nas condições do corolário 3.2.3 e supondo $\#B^0 \subseteq TN$,*

$$\{C^\infty(M)_B, C^\infty(M)_B\} \subseteq C^\infty(M)_F$$

se e só se, localmente, existe uma coleção de secções diferenciáveis de F, com extensões a campos de vetores $X_i \in \mathcal{X}(M)$, tais que

$$(\mathcal{L}_{X_i} P)\big|_N \subseteq B \wedge T_N M, \ \text{com } i \in \{1, ..., n\}, \tag{3.8}$$

onde n é a característica da distribuição F e P representa o tensor de Poisson associado a $\{\ ,\ \}$.

Demonstração. Dado $p \in N$, sejam $X \in \mathcal{X}(M)$ um campo de vetores em M e $U \subseteq N$ uma vizinhança aberta de p em N tais que $X|_U$ é uma secção diferenciável de F, isto é,

$$X(q) \in F_q, \quad \forall q \in U.$$

Considere-se $f \in C^\infty(M)_B$. Então, como $F \subseteq B$, tem-se

$$X(f)(q) = df_q(X(q)) = 0, \quad \forall q \in U,$$

de onde resulta que

$$d(X(f))_q(u) = 0, \quad \forall q \in U, \forall u \in T_qU \cong T_qN.$$

Assim, dado $g \in C^\infty(M)_B$, tem-se

$$\{g, X(f)\}(q) = d(X(f))_q(X_g(q)) = 0, \quad \forall q \in U,$$

uma vez que

$$X_g(q) = \#dg_q \in \#B_q^0 \subseteq T_qN \cong T_qU.$$

Desta forma se conclui que, dados $f, g \in C^\infty(M)_B$ quaisquer, se tem

$$\{g, X(f)\}(q) = \{f, X(g)\}(q) = 0, \quad \forall q \in U.$$

Aplicando a fórmula do lema 3.2.4 obtém-se, quaisquer que sejam $f, g \in C^\infty(M)_B$,

$$(\mathcal{L}_X P)(df, dg)(q) = X(\{f, g\})(q), \quad \forall q \in U.$$

- Comecemos por provar a implicação inversa. Suponhamos que

  $$(\mathcal{L}_X P)\big|_N \subseteq B \wedge T_N M$$

  e sejam $f, g \in C^\infty(M)_B$. Então

  $$(\mathcal{L}_X P)\big|_N(df, dg) = 0,$$

  uma vez que, dado $q \in N$, existem $u \in B_q$ e $v \in T_qM$ tais que

  $$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X P)(df, dg)(q) &= u \wedge v(df_q, dg_q)\\ &= df_q(u)dg_q(v) - dg_q(u)df_q(v)\\ &= 0.\end{aligned}$$

  Assim se conclui, em particular, que

  $$X(\{f, g\})(p) = d(\{f, g\})_p(X(p)) = 0.$$

  Como F é uma distribuição diferenciável, dado $p \in N$ e $u \in F_p$ quaisquer, existe uma secção diferenciável de F, que podemos estender a um campo de vetores $X \in \mathcal{X}(M)$, tal que $X(p) = u$. Assim, fazendo variar $p \in N$ e $u \in F_p$ e aplicando os argumentos anteriores, conclui-se que

$$d(\{f,g\})_p(u) = 0, \quad \forall p \in N, \forall u \in F_p,$$

ou seja,

$$\{f,g\} \in C^\infty(M)_F,$$

ficando assim provada a implicação.

- Suponhamos agora que

$$\{C^\infty(M)_B, C^\infty(M)_B\} \subseteq C^\infty(M)_F.$$

Dada uma secção de F (que, sem perda de generalidade, vamos assumir estar definida em N) com extensão a M dada por $X \in \mathcal{X}(M)$, queremos provar que

$$(\mathcal{L}_X P)\big|_N \subseteq B \wedge T_N M,$$

o que equivale a ver que

$$(B \wedge T_N M)^0 \subseteq \left((\mathcal{L}_X P)\big|_N\right)^0.$$

Assim, dado $p \in N$, considerem-se $\alpha_p, \beta_p \in T_p^* M$ tais que

$$(\alpha_p, \beta_p) \in (B \wedge T_N M)_p^0,$$

ou seja, para todo $u \in B_p$ e $v \in T_p M$, tem-se

$$u \wedge v(\alpha_p, \beta_p) = \alpha_p(u)\beta_p(v) - \beta_p(u)\alpha_p(v) = 0,$$

isto é,

$$\alpha_p(u)\beta_p(v) = \beta_p(u)\alpha_p(v). \tag{3.9}$$

O nosso objetivo é mostrar que

$$(\alpha_p, \beta_p) \in (\mathcal{L}_X P)_p^0.$$

Para tal, tendo em conta a condição (3.9), temos três casos a considerar:

  - Se $\alpha_p \notin B_p^0$, então existe algum $u_0 \in B_p$ tal que

$$\alpha_p(u_0) \neq 0$$

  e, nesse caso, dado $v \in T_p M$ arbitrário, tem-se

$$\beta_p(v) = \frac{\beta_p(u_0)}{\alpha_p(u_0)}\alpha_p(v),$$

ou seja,

$$\beta_p = k\alpha_p, \text{ com } k = \frac{\beta_p(u_0)}{\alpha_p(u_0)}.$$

Assim, uma vez que $\mathcal{L}_X P$ é um 2-tensor antissimétrico, tem-se

$$(\mathcal{L}_X P)\big|_p(\alpha_p, \beta_p) = (\mathcal{L}_X P)\big|_p(\alpha_p, k\alpha_p) = k(\mathcal{L}_X P)\big|_p(\alpha_p, \alpha_p) = 0,$$

de onde resulta o pretendido;

- Se $\beta_p \notin B_p^0$, o argumento é análogo ao caso anterior;
- Se $\alpha_p, \beta_p \in B_p^0$, pelo lema 2.2.5, existem $f, g \in C^\infty(M)_B$ tais que

$$\alpha_p = df_p \text{ e } \beta_p = dg_p.$$

Usando o argumento do início da prova, conclui-se que

$$(\mathcal{L}_X P)\big|_p(df_p, dg_p) = X(\{f, g\})(p),$$

de onde resulta que

$$(\mathcal{L}_X P)\big|_p(df_p, dg_p) = 0,$$

uma vez que $X(p) \in F_p \subseteq B_p$ e que, por hipótese, $\{f, g\} \in C^\infty(M)_F$, finalizando-se assim a prova.

□

3.3 Exemplos

Nesta secção vamos estudar dois casos de variedades Poisson-redutíveis onde a condição de B ser canónico não é satisfeita, ou seja, casos não contemplados pelo Teorema da Redução de Marsden & Ratiu. Em ambas as situações, a Poisson-redutibilidade será garantida com recurso ao corolário 3.2.3.

Exemplo 3.3.1. *Seja $M = \mathbb{R}^3$, com coordenadas cartesianas globais $\{x, y, z\}$ e tensor de Poisson dado por*

$$P = z\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}.$$

Considere-se a subvariedade mergulhada

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : z = 0\}$$

e o subfibrado $B \subseteq T_N M$ gerado por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z}\bigg|_N \right\}.$$

Uma vez que TN é gerado por

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_N, \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_N \right\},$$

conclui-se que

$$F = B \cap TN = 0,$$

logo $C^\infty(M)_F = C^\infty(M)$, de onde resulta automaticamente a condição (3.7) do corolário 3.2.3. Para podermos concluir a Poisson-redutibilidade de (M, P, N, B), basta então ver que

$$\# B^0 \subseteq TN.$$

Seja

$$\alpha = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz \in B^0 \subseteq T^*M,$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in C^\infty(M)$. Considere-se agora $\beta \in T^*M$ qualquer. Então,

$$\begin{aligned}
\langle \beta, \#\alpha \rangle &= P(\alpha, \beta) \\
&= z \left(\frac{\partial}{\partial x}(\alpha) \frac{\partial}{\partial y}(\beta) - \frac{\partial}{\partial x}(\beta) \frac{\partial}{\partial y}(\alpha) \right) \\
&= z\alpha_1 \frac{\partial}{\partial y}(\beta) - z\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x}(\beta)
\end{aligned}$$

logo, dado $p \in N$ arbitrário, como $z(p) = 0$, tem-se

$$\langle \beta_p, \#\alpha_p \rangle = 0, \quad \forall \beta_p \in T_p^*M,$$

de onde se conclui que

$$\#\alpha = 0 \in TN.$$

Estão então reunidas as condições do corolário 3.2.3, de onde resulta que (M, P, N, B) é Poisson-redutível.

No entanto B não é canónico, uma vez que, por exemplo, $x, y \in C^\infty(M)_B$, pois

$$dx|_N \left(\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_N \right) = dy|_N \left(\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_N \right) = 0,$$

mas

$$\{x, y\} = P(dx, dy) = z$$

não é B-invariante, uma vez que

$$dz|_N \left(\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_N \right) = 1.$$

De notar, no entanto, que embora o exemplo anterior cumpra o seu propósito, não deixa de ser um caso demasiado trivial, já que, na realidade, não obtemos um espaço reduzido de dimensão inferior à dimensão da subvariedade original. O exemplo seguinte vem colmatar essa falha, dando-nos uma variedade Poisson-redutível com $F \neq 0$.

Exemplo 3.3.2. *Seja $M = \mathbb{R}^6$, com coordenadas cartesianas (globais)*

$$\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$$

e tensor de Poisson dado por

$$P = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i},$$

isto é, a variedade de Poisson obtida da variedade simplética canónica

$$\left(\mathbb{R}^6, \sum_{i=1}^{3} dx_i \wedge dy_i\right)$$

pelo processo usual. Considere-se a subvariedade mergulhada

$$N = \left\{(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^6 : y_3 = 0\right\}$$

e o subfibrado $B \subseteq T_N M$ gerado por

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_N, \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_N + \alpha \left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_N \right\},$$

com $\alpha \in C^\infty(N)$. Como TN é gerado por

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_N, \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_N, \left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_N, \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_N, \left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_N \right\},$$

claramente tem-se

$$F = B \cap TN = B.$$

Como F tem característica 2 em todos os pontos de N, o Teorema de Frobenius garante que F é uma distribuição integrável se e só se, dadas quaisquer duas secções diferenciáveis X, Y de F, $[X, Y]$ também é uma secção diferenciável de F. Vejamos então o que acontece ao parêntesis de Lie dos elementos geradores de F:

- *Por antissimetria do parêntesis de Lie, tem-se*

$$\left[\left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_N, \left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_N \right] = \left[\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_N + \alpha \left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_N, \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_N + \alpha \left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_N \right] = 0;$$

- *Agora, recorrendo à linearidade do parêntesis de Lie e aos lemas A.0.13 e A.0.14, tem-se*

$$\begin{aligned}
\left[\left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_N, \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_N + \alpha\left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_N\right] &= \left[\left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_N, \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_N\right] + \left[\left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_N, \alpha\left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_N\right] \\
&= \alpha\left[\left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_N, \left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_N\right] + d\alpha\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_N\right)\left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_N \\
&= \frac{\partial \alpha}{\partial x_3}\left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_N.
\end{aligned}$$

  Como todos os elementos de F são da forma

$$f\left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_N + g\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_N + \alpha\left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_N\right)$$

  com $f, g \in C^\infty(N)$, conclui-se que

$$\left[\left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_N, \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_N + \alpha\left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_N\right] \in F \iff \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} = 0,$$

  ou seja, se e só se α não depende de x_3.

Vamos agora verificar que é satisfeita a condição

$$\#B^0 \subseteq TN.$$

Como TN^0 é gerado por $\{dy_3\}$, $\#TN^0$ é gerado por

$$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_N\right\},$$

pelo que

$$\#TN^0 \subseteq B,$$

de onde resulta, lembrando o lema 2.1.20, que

$$\#B^0 \subseteq TN.$$

Para podermos concluir que (M, P, N, B) é Poisson-redutível utilizando o cololário 3.2.3, falta verificar a condição (3.7) que, lembrando o lema 3.2.5, é equivalente à condição (3.8), mais simples de verificar neste caso. Temos então duas situações a considerar:

- $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}$*: recorrendo à definição A.0.10 e aos lemas A.0.12 e A.0.14, tem-se*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_1} P &= \sum_{i=1}^{3}\left(\left(\mathcal{L}_{X_1}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \wedge \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \left(\mathcal{L}_{X_1}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(\left[\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right] \wedge \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \left[\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right]\right) = 0,
\end{aligned}$$

de onde resulta, em particular, que

$$(\mathcal{L}_{X_1}P)\big|_N \subseteq B \wedge T_N M;$$

- $X_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha' \frac{\partial}{\partial y_2}$, *onde* $\alpha' \in C^\infty(M)$ *é tal que*

$$\alpha'\big|_N = \alpha \text{ e } d\alpha'\big|_{TN} = d\alpha.$$

Então, o campo de vetores

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha' \frac{\partial}{\partial y_2} \in \mathcal{X}(M)$$

é uma extensão a M *da secção diferenciável*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_N + \alpha \left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_N \in F.$$

Assim, recorrendo novamente à definição A.0.10 e aos lemas A.0.12, A.0.13 e A.0.14, tem-se

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{L}_{X_2}P) = \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(\left[\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha' \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right] \wedge \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha' \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(\left[\alpha' \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right] \wedge \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \left[\alpha' \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(-d\alpha'\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial y_2} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge d\alpha'\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\frac{\partial}{\partial y_2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial \alpha'}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial \alpha'}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \wedge \frac{\partial}{\partial y_2} \\
&= \#d\alpha' \wedge \frac{\partial}{\partial y_2},
\end{aligned}$$

de onde resulta que

$$(\mathcal{L}_{X_2}P)\big|_N = \#d\alpha \wedge \left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_N.$$

Falta agora verificar em que condições se tem $\#d\alpha \in B$, *de modo à condição (3.8) ser satisfeita. Como*

$$\#d\alpha = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_N - \frac{\partial \alpha}{\partial y_i}\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_N\right),$$

para que $\#d\alpha$ pertença a B, α tem de satifazer

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y_2} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} = 0,$$

ou seja, α não pode depender de x_1, x_3 nem de y_2. Como $\alpha \in C^\infty(N)$, α também não depende de y_3, logo apenas pode depender de x_2 e y_1 (a independência de x_3 para garantirmos a diferenciabilidade de F já está aqui contemplada).

Concluimos assim que, se $\alpha = \alpha(x_2, y_1) \in C^\infty(N)$, então estão reunidas as condições do corolário 3.2.3, garantindo-se assim a Poisson-redutibilidade de (M, P, N, B).

Vamos agora tentar perceber que tipo de variedade é $\overline{N} = N/F$ e como é o seu parêntesis de Poisson.

Sabemos que dim(N)=5 e que as folhas de N induzidas pela distribuição F têm dimensão 2. Vamos tentar situar tais folhas recorrendo a funções linearmente independentes que as contenham nas suas curvas de nível. Considerem-se então três funções linearmente independentes, $h_1, h_2, h_3 \in C^\infty(N)$, tais que, para todo $p \in N$, se tem

$$(dh_i)_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_p \right) = (dh_i)_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p + \alpha \left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_p \right) = 0,$$

com $i \in \{1, 2, 3\}$. Assim, dado $p \in N$, a folha $S_p \subseteq N$ (isto é, a maior variedade conexa contida em N que contém p e é tal que, para todo $q \in S_p$, se tem $T_q S_p = F_q$) estará contida na interseção das curvas de nível de h_1, h_2 e h_3 que contêm esse ponto, uma vez que cada uma destas funções é constante ao longo do fluxo de cada campo de vetores em N que gera a distribuição F.

Seja $h \in C^\infty(N)$. Então,

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1\big|_N + \frac{\partial h}{\partial x_2} dx_2\big|_N + \frac{\partial h}{\partial x_3} dx_3\big|_N + \frac{\partial h}{\partial y_1} dy_1\big|_N + \frac{\partial h}{\partial y_2} dy_2\big|_N.$$

Vamos agora tentar perceber quais as condições a que a função h tem de obedecer para que a sua diferencial anule os elementos de F.

$$\begin{cases} dh\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_N \right) = 0 \\ \\ dh\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_N + \alpha \left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_N \right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0 \\ \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial h}{\partial y_2} = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Precisamos de 3 funções linearmente independentes que obedeçam às condições (3.10). Duas opções óbvias serão

$$h_1 = x_2 \text{ e } h_2 = y_1.$$

Uma terceira função nas condições exigidas será, por exemplo, a função

$$h_3 = y_2 - \alpha x_1,$$

que obedece claramente às condições (3.10) e é linearmente independente de h_1 *e* h_2.

Considere-se agora $p \in N$, *com* $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, 0)$, *e seja* S_p *a folha de* N *induzida pela distribuição* F *que passa por* p. *Então,*

$$S_p \subseteq \{q \in N : x_2 = p_2, y_1 = p_4 \text{ e } y_2 - \alpha(x_2, y_1)x_1 = p_5 - \alpha(p_2, p_4)p_1\},$$

com $q = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, 0)$, *ou seja,*

$$S_p \subseteq \{q \in N : x_2 = p_2, y_1 = p_4 \text{ e } y_2 = p_5 + \alpha(p_2, p_4)(x_1 - p_1)\}.$$

Como o conjunto do lado direito consiste na interseção de 3 hiper-planos, é conexo e tem dimensão 2, na realidade a inclusão acima é uma igualdade, ou seja,

$$F_p \cong \mathbb{R}^2.$$

Vamos agora estudar o parêntesis de Poisson em $\overline{N}$. *Notando que*

$$h_i \in C^\infty(N)_F \cong C^\infty(\overline{N}), \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

considere-se o sistema de coordenadas em $\overline{N}$ *dado por*

$$\{\overline{x_2}, \overline{y_1}, \overline{y_2}\} = \{h_1, h_2, h_3\} = \{x_2, y_1, y_2 - \alpha x_1\}.$$

Para calcularmos o valor do parêntesis de Poisson em $\overline{N}$ *em pares de coordenadas precisamos de extensões* B*-invariantes a* M *das funções coordenadas* h_1, h_2 *e* h_3. *Uma vez que* $B = F$, *com algum abuso de linguagem chamaremos* x_2 *e* y_1 *às extensões a* M *das coordenadas* $h_1 = x_2$ *e* $h_2 = y_1$, *respetivamente, e* $y_2 - \alpha' x_1$ *à extensão de* h_3 *a* M, *onde* α' *é a extensão natural de* α *a* M, *isto é,*

$$\alpha' = \alpha \circ \pi,$$

com

$$\pi : M \longrightarrow N$$

dado por $\pi(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, 0)$. *Assim, tendo em conta que* α' *só depende de* x_2 *e* y_1, *e uma vez que*

$$\begin{aligned} &\{x_i, x_j\} = \{y_i, y_j\} = 0, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}; \\ &\{x_i, y_j\} = \delta_{ij}, \end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned} &\{\overline{x_2}, \overline{y_1}\}_{\overline{N}} = i^*\{x_2, y_1\} = 0; \\ &\{\overline{x_2}, \overline{y_2}\}_{\overline{N}} = i^*\{x_2, y_2 - \alpha' x_1\} = i^*(\{x_2, y_2\} - \alpha'\{x_2, x_1\} - \{x_2, \alpha'\}x_1) = 1; \\ &\{\overline{y_1}, \overline{y_2}\}_{\overline{N}} = i^*\{y_1, y_2 - \alpha' x_1\} = i^*(\{y_1, y_2\} - \alpha'\{y_1, x_1\} - \{y_1, \alpha'\}x_1) = \alpha. \end{aligned}$$

Apêndice A

Tópicos de variedades diferenciáveis e álgebra linear

O objetivo deste apêndice é o de apresentar alguns conceitos e resultados de variedades diferenciáveis e álgebra linear que, embora maioritariamente elementares, vêm estabelecer uma escolha na convenção de sinais e ajudam a justificar e clarificar o trabalho apresentado nos capítulos principais.

Tópicos de variedades diferenciáveis

Definição A.0.1. *Seja M uma variedade diferenciável e $X \in \mathcal{X}(M)$ um campo de vetores de M. Dado $p \in M$, dá-se o nome de curva integral maximal de X por p (que denotaremos, a partir de agora, simplesmente por curva integral de X por p) à curva $\gamma : I_p \longrightarrow M$ que satisfaz*

- $\gamma(0) = p$;
- $\frac{d\gamma(t)}{dt} = X(\gamma(t)), \quad \forall t \in I_p$,

onde $I_p =]-\epsilon, \epsilon[\subseteq \mathbb{R}$ representa o domínio (maximal) de γ.

O enunciado do teorema seguinte pode ser encontrado em [9] (apêndice 1, pág. 347, teorema 2.4), onde é definida a noção de fluxo gerado por um campo de vetores.

Teorema A.0.2. *Seja M uma variedade diferenciável e $X \in \mathcal{X}(M)$ um campo de vetores de M. Então, existe uma única aplicação diferenciável $\sigma : D \longrightarrow M$, com $D \subseteq M \times \mathbb{R}$, tal que, para cada $p \in M$ fixado, a aplicação*

$$\begin{aligned} I_p &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \sigma(p, t) = \sigma_t(p) \end{aligned}$$

é a curva integral de X por p. D é o domínio de σ e é dado por

$$D = \{(p, t) \in M \times \mathbb{R}\text{: a curva integral de } X \text{ por } p \text{ está definida em } t\}.$$

À aplicação σ dá-se o nome de fluxo (local) gerado por X. O campo de vetores X diz-se completo se $D = M \times \mathbb{R}$.

As propriedades apresentadas no lema seguinte podem ser encontradas em [9] (apêndice 1, pág. 347).

Lema A.0.3. *Nas condições do teorema A.0.2, o fluxo (local) gerado por X tem as seguintes propriedades:*

1. $\sigma_0 = id_M$;

2. *para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto*

$$D_t = \{p \in M : (p,t) \in D\}$$

é um aberto de M. Se não for vazio, a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma_t : D_t &\longrightarrow D_{-t} \\ p &\longmapsto \sigma_t(p) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo, com inversa σ_{-t};

3. *se (p,s) e $(\sigma_s(p),t)$ pertencem a D, então $(p,t+s)$ pertence a D e, além disso, tem-se*

$$\sigma_{t+s}(p) = \sigma_t \circ \sigma_s(p).$$

Nota A.0.4. *Ao longo de todo este trabalho, com algum abuso de linguagem, denotaremos*

- *o fluxo (local) gerado por X por σ_t e referir-nos-emos a ele, na maioria das vezes, simplesmente como o fluxo de X;*
- *a curva integral de X por p por $\sigma_t(p)$.*

Definição A.0.5. *Seja M uma variedade diferenciável. Se $\varphi \in$ Dif(M), define-se*

- *ação de φ sobre $X \in \mathcal{X}(M)$ como*

$$\varphi \cdot X = (d\varphi(X)) \circ \varphi^{-1};$$

- *pullback de uma k-forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$ por φ como*

$$(\varphi^*\omega)(X_1, ..., X_k) = \omega(\varphi \cdot X_1, ..., \varphi \cdot X_k) \circ \varphi,$$

com $X_1, ..., X_k \in \mathcal{X}(M)$. No caso particular $k = 0$ tem-se, para toda a função $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$,

$$\varphi^* f = f \circ \varphi;$$

- *ação de φ sobre $\omega \in \Omega^k(M)$ como*

$$\varphi \cdot \omega = (\varphi^{-1})^* \omega.$$

Lema A.0.6. *Seja M uma variedade diferenciável. Dados $\varphi \in$ Dif(M) e $X \in \mathcal{X}(M)$, o fluxo de $\varphi \cdot X$ é*

$$\varphi \circ \sigma_t \circ \varphi^{-1},$$

onde σ_t representa o fluxo de X.

Demonstração. $\varphi \circ \sigma_t \circ \varphi^{-1}$ é o fluxo de $\varphi \cdot X$, uma vez que:

- $\varphi \circ \sigma_0 \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} = id_M$;
- dado $p \in M$ qualquer, tem-se

$$\begin{aligned}
(\varphi \cdot X)(\varphi \circ \sigma_t \circ \varphi^{-1}(p)) &= (d\varphi)_{\sigma_t \circ \varphi^{-1}(p)}(X(\sigma_t \circ \varphi^{-1}(p))) \\
&= (d\varphi)_{\sigma_t \circ \varphi^{-1}(p)} \left(\frac{d(\sigma_t \circ \varphi^{-1}(p))}{dt} \right) \\
&= \frac{d(\varphi \circ \sigma_t \circ \varphi^{-1}(p))}{dt},
\end{aligned}$$

pelo que a curva integral de $\varphi \cdot X$ por p é $\varphi \circ \sigma_t \circ \varphi^{-1}(p)$. □

Nota A.0.7. *Uma vez que qualquer campo de vetores X em M se identifica com uma derivação em $(C^\infty(M), .)$ através de*

$$X(f)(p) = df_p(X(p))$$

para todos $f \in C^\infty(M)$ e $p \in M$, vamos usar a mesma notação para campo de vetores e para a derivação correspondente esperando que, com isso, não haja dúvidas sobre qual das visões estamos a utilizar em cada momento.

Lema A.0.8. *Seja M uma variedade diferenciável. Dado $\varphi \in$ Dif(M) e $X \in \mathcal{X}(M)$, tem-se*

$$(\varphi \cdot X)(f) = X(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}, \quad ,\forall f \in C^\infty(M).$$

Demonstração. Dado $f \in C^\infty(M)$, tem-se

$$\begin{aligned}
(\varphi \cdot X)(f) &= df(\varphi \cdot X) \\
&= df((d\varphi(X)) \circ \varphi^{-1}) \\
&= d(f \circ \varphi)(X) \circ \varphi^{-1} \\
&= X(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1},
\end{aligned}$$

ficando assim concluída a prova. □

Definição A.0.9. *Seja M uma variedade diferenciável. Dá-se o nome de derivada de Lie (na direção de $X \in \mathcal{X}(M)$) de uma k-forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$ e de um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$ a $\mathcal{L}_X\omega \in \Omega^k(M)$ e $\mathcal{L}_X Y \in \mathcal{X}(M)$, respetivamente, dadas por*

- $(\mathcal{L}_X\omega)_p(u_1, ..., u_k) = \frac{d((\sigma_t^*\omega)_p(u_1,...,u_k))}{dt}\Big|_{t=0}$;
- $(\mathcal{L}_X Y)(p) = \frac{d((\sigma_t^{-1}\cdot Y)(p))}{dt}\Big|_{t=0}$,

com $p \in M$, $u_1, ..., u_k \in T_pM$ e onde σ_t representa o fluxo de X.

Definição A.0.10. *Seja M uma variedade diferenciável. Dado $X \in \mathcal{X}(M)$, define-se a derivada de Lie (na direção de X) de um 2-tensor contravariante e antissimétrico como sendo a aplicação $\mathcal{L}_X : \Gamma(\wedge^2 TM) \longrightarrow \Gamma(\wedge^2 TM)$ tal que*

- $\mathcal{L}_X(Y \wedge Z) = (\mathcal{L}_X Y) \wedge Z + Y \wedge (\mathcal{L}_X Z), \quad \forall Y, Z \in \mathcal{X}(M)$;
- $\mathcal{L}_X$ *é $\mathbb{R}$-linear, isto é,*

$$\mathcal{L}_X(aP + bQ) = a\mathcal{L}_X P + b\mathcal{L}_X Q, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall P, Q \in \Gamma(\wedge^2 TM).$$

A definição que se segue vem estabelecer uma convenção de sinal importante que ditará qual o sinal presente em alguns dos resultados e definições apresentados tanto neste apêndice como nos capítulos principais deste trabalho.

Definição A.0.11. *Seja M uma variedade diferenciável. Dados $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ define-se o parêntesis de Lie de X com Y, $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$, cuja derivação é dada por*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

para toda a função $f \in C^\infty(M)$.

Esta convenção é simétrica à utilizada por McDuff e Salamon em [14] e por Arnold em [2], que escolhem definir o parêntesis de Lie por

$$[X, Y](f) = Y(X(f)) - X(Y(f))$$

com vista à obtenção das equações de Hamilton (tal como surgem na mecânica Hamiltoniana) para o fluxo de um campo Hamiltoniano.

De acordo com a convenção de sinal previamente adotada, segue-se um lema que nos dá uma propriedade importante da derivada de Lie de um campo de vetores. Esta propriedade pode ser encontrada em [9] (apêndice 1, pág. 351, ponto 3.4.2).

Lema A.0.12. *Seja M uma variedade diferenciável. Dados $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, tem-se*

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Os dois lemas seguintes são uma aplicação direta da definição de parêntesis de Lie enquanto derivação:

Lema A.0.13. *Seja M uma variedade diferenciável. Dados $f, g \in C^\infty(M)$ e $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, tem-se*

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fdg(X)Y - gdf(Y)X.$$

Lema A.0.14. *Seja M uma variedade diferenciável e $\{x_1, ..., x_n\}$ um sistema de coordenadas locais em $U \subseteq M$. Sejam $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, dados localmente através de*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ e } Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

com $X^i, Y^i \in C^\infty(U)$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Então, tem-se

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Em particular,

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0, \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Lema A.0.15. *Seja M uma variedade diferenciável e $N \subseteq M$ uma subvariedade de M. Dada uma função $f \in C^\infty(M)$, f é constante em cada componente conexa de N se e só se*

$$df_p(u) = 0, \quad \forall p \in N, \forall u \in T_pN.$$

Demonstração. Comecemos por ver a implicação direta. Seja $f \in C^\infty(M)$ tal que, para cada componente conexa N_i de N, existe alguma constante $c_i \in \mathbb{R}$, tal que

$$f\big|_{N_i} = c_i.$$

Fixemos então uma componente conexa N_i de N arbitrária. Dado $p \in N_i$ qualquer, considere-se $u \in T_pN_i$. Tendo em conta a caracterização apropriada de T_pN_i, podemos escrever $u \in T_pN_i$ da forma

$$u = \left.\frac{d\gamma(t)}{dt}\right|_{t=0},$$

com $\gamma:\ ]-\epsilon,\epsilon[\longrightarrow N_i$ curva suave em N_i tal que $\gamma(0)=p$. Então,

$$df_p(u)=\left.\frac{d(f\circ\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{dc_i}{dt}\right|_{t=0}=0,$$

ficando assim provada a implicação direta.

Suponha-se agora que $f\in C^\infty(M)$ é tal que

$$df_p(u)=0,\quad \forall p\in N,\forall u\in T_pN.$$

Fixemos então uma componente conexa N_i de N arbitrária. Dada uma curva suave $\gamma:\ ]-\epsilon,\epsilon[\longrightarrow N_i$ com

$$\left.\frac{d\gamma(t)}{dt}\right|_{t=0}\in T_pN_i$$

para algum $p\in N_i$, tem-se, qualquer que seja $t_0\in\ ]-\epsilon,\epsilon[$,

$$\left.\frac{d\gamma(t)}{dt}\right|_{t=t_0}\in T_{\gamma(t_0)}N_i.$$

De facto, para cada t_0, defina-se uma reparametrização da curva γ da forma

$$\begin{array}{rcl}\delta:\ ]-\epsilon_1,\epsilon_1[& \longrightarrow & N_i\\ t & \longmapsto & \gamma(t+t_0)\end{array},$$

com $]t_0-\epsilon_1,t_0+\epsilon_1[\ \subseteq\ ]-\epsilon,\epsilon[$. Então,

$$\left.\frac{d\delta(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

é tangente a N_i em $\delta(0)=\gamma(t_0)\in N_i$. Assim, fazendo uma mudança de variável e usando a hipótese, obtém-se

$$\left.\frac{d(f\circ\gamma(t))}{dt}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{d(f\circ\delta(s))}{ds}\right|_{s=0}=df_{\gamma(t_0)}\left(\left.\frac{d\delta(s)}{ds}\right|_{s=0}\right)=0.$$

Daqui resulta que a função f é constante ao longo da curva γ. Fazendo variar o elemento de T_pN_i, conclui-se que f é, na realidade, constante numa vizinhança de p em N_i. Como N_i é conexa e a hipótese vale para todo $p\in N_i$, segue o pretendido. $\square$

Tópicos de álgebra linear

Lema A.0.16. *Considere-se um espaço vetorial* V *e* $S, T \leq V$*. Então,*

1. $S^0 \cap T^0 = (S+T)^0$;
2. $Ker(S^0) = S$.

Demonstração. Considerem-se dois subspaços vetoriais $S, T \subseteq V$.

1. Dada $\alpha \in S^0 \cap T^0$, isto é, $\alpha \in V^*$ tal que

$$\langle \alpha, u \rangle = \langle \alpha, v \rangle = 0, \quad \forall u \in S, \forall v \in T,$$

tem-se

$$0 = \langle \alpha, u \rangle + \langle \alpha, v \rangle = \langle \alpha, u + v \rangle, \quad \forall u \in S, \forall v \in T,$$

de onde resulta que $\alpha \in (S+T)^0$, ficando assim provada a inclusão direta.

Considere-se agora $\alpha \in (S+T)^0$ qualquer. Como

$$\langle \alpha, u + v \rangle = 0, \quad \forall u \in S, \forall v \in T,$$

por um lado, tomando $v = 0$, obtém-se

$$\langle \alpha, u \rangle = 0, \quad \forall u \in S,$$

por outro lado, tomando $u = 0$, obtém-se

$$\langle \alpha, v \rangle = 0, \quad \forall v \in T,$$

de onde resulta que $\alpha \in S^0 \cap T^0$.

2. Sejam $n, m \in \mathbb{R}$, com $m \leq n$, as dimensões de V e S, respetivamente. Considere-se $\{e_1, ..., e_m\}$ uma base de S e $\{e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n\}$ uma base de V. Seja $\{x_1, ..., x_n\}$ a base de V^* dada pelas funções coordenadas na base de V acima definida. Seja $\alpha \in S^0 \subseteq V^*$. Então, existem $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ para os quais

$$\alpha = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

Avaliando α nos vetores da base de S conclui-se que

$$a_i = 0, \quad \forall i \in \{1, ..., m\},$$

de onde resulta, na realidade, que

$$\alpha = a_{m+1} x_{m+1} + \cdots + a_n x_n,$$

isto é, $\{x_{m+1}, ..., x_n\}$ é uma base de S^0. Considere-se agora $u \in \mathrm{Ker}(S^0) \subseteq V$. Como $u \in V$, existem escalares $u_1, ..., u_n$ tais que

$$u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n.$$

Por outro lado, como $u \in \mathrm{Ker}(S^0)$, tem-se

$$\langle \alpha, u \rangle = 0, \quad \forall \alpha \in S^0.$$

Considerem-se agora as aplicações lineares que compõem a base de S^0. Então,

$$\langle x_i, u \rangle = u_i = 0, \quad \forall i \in \{m+1, ..., n\}.$$

Assim, na realidade, tem-se

$$u = u_1 e_1 + \cdots + u_m e_m,$$

de onde resulta que $\{e_1, ..., e_m\}$ é uma base de $\mathrm{Ker}(S^0)$, concluindo-se desta forma o pretendido.

$\square$

Bibliografia

[1] R. Abraham, J. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1978.

[2] V. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 60. Springer Science+Business Media New York, 1989.

[3] W. Ebeling, K. Hulek, K. Smoczyk. *Complex and Differential Geometry*. Conference held at Leibniz Universität Hannover, September 14-18, 2009. Springer Proceedings in Mathematics, vol. 8. Springer-Verlag Berlim Heidelberg, 2011.

[4] F. Falceto, M. Zambon. "An Extension of the Marsden-Ratiu Reduction for Poisson Manifolds". *Letters in Mathematical Physics*, **85** (2008), pp. 203-219.

[5] R. Fernandes. *Diferential Geometry*. Department of Mathematics, UIUC, Urbana IL, USA, 2021.

[6] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Academic Press, Inc., 1978.

[7] J. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 218. Springer Science+Business Media New York 2003, 2013.

[8] J. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 176. Springer International Publishing AG, 2018.

[9] P. Libermann, C. Marle. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Mathematics and Its Applications. D. Reidel Publishing Company, 1987.

[10] A. Lichnerowicz. "Les Variétés de Poisson et leurs Algèbres de Lie associées". *Journal of Differential Geometry*, **12** (1977), pp. 253-300.

[11] E. Lima. *Variedades Diferenciáveis*. Publicações Matemáticas. IMPA, 2011.

[12] J. Marsden, T. Ratiu. "Reduction of Poisson Manifolds". *Letters in Mathematical Physics*, **11** (1986), pp. 161-169.

[13] J. Marsden, A. Weinstein. "Reduction of Symplectic Manifolds with Symmetry". *Reports on Mathematical Physics*, **5** (1974), pp. 121-130.

[14] D. McDuff, D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology.* Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 27. Oxford University Press, 2017.

[15] J. Ortega, T. Ratiu. *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction.* Progress in Mathematics, vol. 222. Springer Science+Business Media New York, 2004.

[16] I. Vaisman. *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds.* Progress in Mathematics, vol. 118. Birkäuser Verlag, 1994.

[17] A. Weinstein. "The Local Structure of Poisson Manifolds". *Journal of Differential Geometry*, **18** (1983), pp. 523-557.